Poštarina plaćena u gotovu

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO

SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.

T. 1 — 1946. — No. 5

Zagreb 1946

Izdaju: Matematičko-fizička sekcija i Astronomsko-geofizička sekcija

SADRŽAJ

UGAO ZA SVAKOGA

Članci, dopisi, pretplate i dr. šalju se na Redakciju Glasnika, Zagreb, Marulićev trg 19, Tel. 40-44, 40-45 ili na Upravu Društva, Ilica 16 III, Tel. 65-85 i naznačiti »Za Glasnik mat.-fizički i astronomski«. — Ček Prirodoslovnog društva: 40-704214.

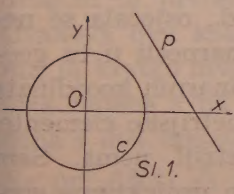
Vlasništvo i naklada Društva.

Godišnja pretplata iznosi Din 120.—, a može se slati na pošt. čekovni račun broj 40-704214. — Redakcioni odbor: Dr. D. Blanuša, D. M. Katalinić, Dr. Đ. Kurepa, Dr. L. Randić, Dr. I. Supek. — Glavni i odgovorni urednik: Dr. Đuro Kurepa. — Štamparija »Rožankovski«, Zagreb, Savska c. 31.

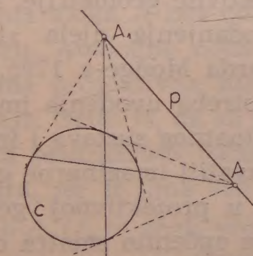
Dr. Vilim Niče:

O IMAGINARNIM ELEMENTIMA U GEOMETRIJI

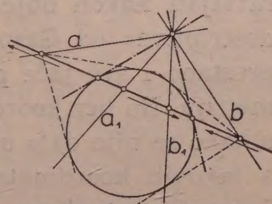
Govoriti o imaginarnim elementima u geometriji uopće značilo bi zahvatiti u ogroman dio čitave geometrije. Radi ograničenog vremena i prostora obuhvatit ćemo ovdje samo izvjestan dio naslovom označene građe, što i jest zapravo naša namjera. Govorit ćemo o konjugirano kompleksnim točkama, pravcima, ravninama i imaginarnim čunjosjecima, i to samo u projektivnoj geometriji. Dakle u geometriji u kojoj ne postoje nikakovi metrički odnosi. Osvrnut ćemo se na te elemente naročito u vezi s nekim krivuljama te pravčastim i općim plohama, čiji su oni i sastavni dijelovi.



Sl. 1.



Sl. 2



Sl. 3

Imaginarni brojevi javljaju se nesvijesno već kod starih Indijaca, pri pokušavanju vađenja drugog korijena iz negativnih brojeva. Kasnije su se time bavili mnogi, kao na pr. Cardano (1560). Izraze realno i imaginarno uvodi tek René Descartes (1596—1650), a u njegovom djelu „Géométrie" prvi puta se geometrija sastaje s pojmom imaginarno. Imaginarni geometrijski elementi postoje od sada u geometriji, ali su oni vezani uz koordinatni sustav analitičke geometrije, koji je uveo Descartes. Imaginarne točke javljaju se u koordinatnoj ravnini kao one točke, kojima su koordinate kompleksni brojevi. Ako nam na pr. poznate jednadžbe $x^2 + y^2 = r^2$ i $y = ax + b$ predočuju kružnicu c i pravac p kao na sl. br. 1,

onda će vrijednosti za x i y, koje zadovoljavaju ove obje jednadžbe, biti neki konjugirano kompleksni brojevi, koje smatramo koordinatama imaginarnih sjecišta ovog pravca i ove kružnice. Par konjugirano kompleksnih točaka dobili smo prema tome ovdje kao imaginarna sjecišta pravca i kružnice.

Zamislimo li takav par točaka spojen s nekom realnom točkom, tada dobivamo par konjugirano kompleksnih pravaca, a nekim realnim pravcem i tim točkama postavljene ravnine daju par konjugirano kompleksnih ravnina. Posve analogno dobivamo analitičkim putem i imaginarne čunjosjeke. Presijecimo na pr. kuglu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ravninom $z = d$, ako je $|d| > r$. Tu će biti i $d^2 > r^2$, dakle je $r^2 - d^2 = -n$, gdje n neki racionalan broj. Jednadžba presjeka kugle s tom ravninom glasi $x^2 + y^2 = -n$, dakle je polumjer te kružnice $\sqrt{-n}$, t. j. imaginaran. Kada bismo stavili $d = r$ dobili bi jednadžbu presjeka $x^2 + y^2 = 0$, ili $(x + iy)\,(x - iy) = 0$, a to je par tako zvanih minimalnih ili izotropnih pravaca, koje ćemo kasnije još dosta spominjati.

U izgradnji projektivne geometrije, koja se je jače počela razvijati nakon objelodanjenja djela »Lecons de géometrie descriptive« od Gasparda Monge-a 1795. god., osjećala se neprestano i sve jače potreba uvođenja imaginarnosti u tu geometriju. No bez koordinatnog sustava i imaginarnih koordinata nikako se nije dalo uhvatiti imaginarne geometrijske elemente, a takovih koordinata u projektivnoj geometriji nema. Sam Jakov Steiner, koga se općenito smatra ocem projektivne geometrije, kao što se Gasparda Monge-a smatra ocem deskriptivne geometrije, nazivao je imaginarne geometrijske elemente sablastima (Gespenste), jer ih nikako nije mogao dohvatiti sredstvima projektivne geometrije. Tek von Staudt uspio je definirati imaginarne geometrijske elemente pomoću postojećih realnih geometrijskih tvorevina tako, da su oni potpuno jednakopravni s realnim elementima (Beiträge zur Geometrie der Lage, god. 1856—60).

Konjugirano kompleksne geometrijske elemente prve vrste, a to su točke, pravci i ravnine, definira von Staudt kao dvostruke točke t. zv. eliptičko involutornog niza točaka, odnosno dvostruke pravce i ravnine eliptičko involutornog pramena pravaca i ravnina. Uvođenjem dvostrukog smisla kretanja involutorno pridruženih točaka, pravaca i ravnina u

tim involutornim nizovima i pramenovima, uspjelo je von Staudtu i odijeliti konjugirano kompleksne elemente jedan od drugoga.

Pogledajmo sada, kako je von Staudt definirao te konjugirano kompleksne elemente prve vrste. Uzmimo dva projektivna niza točaka i položimo ih jedan na drugoga. Mi to tada zovemo dva kolokalna niza. Znademo, da su dva projektivna niza ona, kod kojih četiri točke jednoga niza i četiri pridružene točke drugoga niza imaju isti dvoomjer. Projektivnim nizovima zovemo ih zato, jer ih možemo dobiti jedan iz drugoga projiciranjem iz neke točke na temelju činjenice, koju je našao još grčki učenjak Papus u 4. st. pr. Kr. u Aleksandriji, a koja glasi: Dvomjer četiriju zraka nekog pramena jednak je dvoomjeru četiriju sjecišta tih zraka s bilo kojim pravcem. Pretpostavimo sada, da se u ta dva kolokalna niza nalaze takova dva para točaka A, B i A_1, B_1, kod kojih će točki A jednoga niza biti pridružena točka A_1 u suprotnom nizu bez obzira da li ta točka A pripada prvom ili drugom nizu. Dakle će i točki A_1 biti pridružena točka A bez obzira, da li ova pripada drugom ili prvom nizu. Analogno neka vrijedi za par B, B_1. Ovakova dva kolokalna projektivna niza zovu se involutoran niz, ili kratko involucija. Očito je, da su dva obična projektivna niza zadana s tri para pridruženih točaka. Involucija je određena s dva takova para, jer je time već ispunjen gornji uvjet. Na pr. $ABA_1 \overline{\wedge} A_1 B_1 A$ ($\overline{\wedge}$ = znak projektivnosti). Putujemo li jednom točkom po takovom involutornom nizu, putovati će istovremeno i njoj pridružena točka u tom nizu. Ta dva putovanja mogu biti istosmjerna, a mogu biti i raznosmjerna. Ako su ta dva putovanja raznosmjerna, tada će se parovi pridruženih točaka dva puta sresti, t. j. ovakova će involucija imati dva dvostruka elementa. Tri ili više takovih dvostrukih elemenata ne može ta involucija imati, jer su u takovom slučaju dva kolokalna projektivna niza identična. Ovakova involucija s dvije dvostruke točke zove se hiperbolna. Bilo koje dvije realne točke određuju na njihovoj spojnici neku hiperbolnu involuciju, kojoj su one dvostruke točke. Pretpostavimo li sada, da su spomenuta dva putovanja istosmjerna, onda ta dva involutorno pridružena niza neće imati realnih dvostrukih točaka, ali s ovakova dva involutorno pridružena niza definirao

je von Staudt par imaginarnih točaka. Ovakova involucija zove se eliptička. Naše gore spomenuto putovanje jedne točke i njoj pridružene točke u eliptičkoj involuciji možemo vršiti u dva smjera, t. j. postoje dva smisla obilaženja. Svakim ovim smislom obilaženja definirana je po jedna imaginarna točka u konjugirano kompleksnom paru.

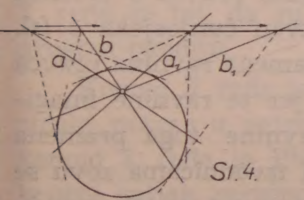
Da nam bude jasnija ovakova definicija konjugirano kompleksnog para točaka, usporedimo je s malo prije analitički definiranim konjugirano kompleksnim parom točaka, odstranivši koordinatni sustav. Uzmimo opet kružnicu c i pravac p, koji ju ne siječe realno. (Sl. br. 2.) Polara neke točke A na pravcu p, obzirom na kružnicu c, siječe taj pravac u nekoj točki A_1, a polara ove točke siječe pravac p opet u točki A. Točke A, A_1 nazivamo parom konjugiranih polova. Svaka točka na pravcu p ima na taj način pridružen involutorno svoj konjugirani pol, a svi ti parovi čine upravo onu eliptičku involuciju, kojom je definiran naš konjugirano kompleksan par sjecišta pravca p i kružnice c.

Kada bi pravac p sjekao kružnicu c u dvije realne točke, dobili bi na tom pravcu posve analogno hiperbolnu involuciju, kojom su definirana realna sjecišta kao dvostruke točke te involucije.

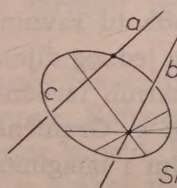
Neizmjerno daleki pravac ravnine kružnice c siječe ju u paru imaginarnih točaka, koje nazivamo apsolutnim točkama te ravnine. Spojnice bilo koje realne točke u toj ravnini s tim apsolutnim točkama daju par već spomenutih izotropnih pravaca. U ovakovom paru izotropnih pravaca siječe kuglu svaka njena tangencijalna ravnina. Neizmjerno daleka ravnina prostora siječe analogno svaku kuglu u imaginarnoj kružnici, koju zovemo apsolutnim čunjosjekom. Svaka ravnina prostora siječe apsolutni čunjosjek u svom paru apsolutnih točaka.

Spojimo li točke niza eliptičke involucije na nekom pravcu s nekom točkom, ili s nekim pravcem, dobit ćemo eliptičko involutaran pramen pravaca, odnosno ravnina, kojima je definiran konjugirano kompleksan par pravaca, odnosno ravnina. Parovi pridruženih zraka u eliptičko involutornom pramenu zraka, kojim je definiran par izotropnih pravaca, međusobno su okomite zrake, jer su to zapravo parovi konjugiranih promjera neke kružnice. Imamo li naime neki čunjosjek i neki

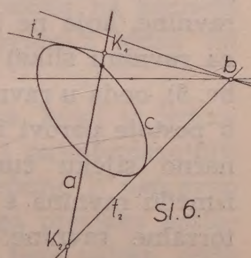
pravac, onda pol toga pravca spojen sa sjecištima njegovim na čunjosjeku daje tangente toga čunjosjeka u tim sjecištima. Ove su tangente dvostruke zrake involutornog pramena, koji je nastao spajanjem toga pola s točkama opisane involucije na tom pravcu. (Sl. br. 3.) Ako pravac siječe čunjosjek imaginarno, onda je njegov pol realno sjecište imaginarnih tangenata toga čunjosjeka u njegovim imaginarnim sjecištima s tim pravcem. (Sl. br. 4.) Ako je pravac neizmjerno dalek, onda je njegov pol središte, a involuciju imaginarnog para tangenata iz te točke čine parovi konjugiranih promjera toga čunjosjeka. Ako je taj čunjosjek kružnica, onda su takovi parovi, kao što znademo, međusobno okomiti promjeri. Ovdje također vidimo, da je središte kružnice sjecište njenih imaginarnih tangenata



Sl. 4.



Sl. 5.



Sl. 6.

u apsolutnim točkama. Kod krivulja višega reda koje prolaze apsolutnim točkama, t. j. kod tako zvanih cirkularnih krivulja, zovu se takove točke četverostruki fokusi.

Povučemo li tangente iz apsolutnih točaka na bilo kakovu krivulju, onda se njihova sjecišta zovu obični fokusi te krivulje. Elipsa ima na pr. par realnih i par imaginarnih fokusa. Odredimo li polaru jednog realnog fokusa (ravnalicu) te parove konjugiranih polova na toj polari spojimo s tim fokusom, dobit ćemo involutoran pramen zraka, kojemu dvostruke zrake čine par izotropnih tangenata te elipse povučenih iz toga fokusa. Parovi pridruženih zraka su u toj involuciji međusobno okomiti. Spomenut ćemo još, da par realnih fokusa elipse možemo shvatiti kao sjecišta njene velike osi kružnicom, koja je opisana oko jednog njenog tjemena na maloj osi, a kojoj je polumjer jednak njenoj velikoj poluosi. Par imaginarnih fokusa te elipse dobivamo posve analogno kao imaginarna sjecišta njene male osi s kružnicom opisanom oko jednog tjemena na velikoj osi, a kojoj je polumjer jednak maloj poluosi te elipse.

Napustimo sada naša razmatranja imaginarnih elemenata, pa ih dalje promatrajmo u vezi s nekim geometrijskim tvorevinama, ili kao sastavne dijelove tih tvorevina. Zabavit ćemo se najprije pravčastim plohama 3. i 4. reda.

Imamo li u prostoru neki čunjosjek c i dva pravca a i b postavljene tako, da jedan (a) siječe čunjosjek c, a drugi (b) ga ne siječe, onda svi pravci prostora, koji sijeku pravce a, b, i čunjosjek c, sačinjavaju neku pravčastu plohu 3. reda. Pravac a joj je dvostruk, a pravac b jednostruki pravac. Ako pravac a kao i pravac b, ne siječe čunjosjek c, onda je takova ploha 4. reda. Ako pravac b, koji ne siječe čunjosjek c, probada ravninu čunjosjeka c iznutra (sl. br. 5), onda su sve izvodnice takove plohe 3. reda realne, jer pravcem b ne možemo postaviti ravnine, koja ne bi sjekla čunjosjek c. Ako pravac b (okomit na ravninu slike) probada tu ravninu izvan čunjosjeka c (sl. br. 6), onda u ravninama jednog dijela pramena ravnina pravca b postoje parovi imaginarnih izvodnica, jer te ravnine imaginarno sijeku čunjosjek c. Granične ravnine toga pramena između ravnina s realnim i imaginarnim izvodnicama zovu se torzalne ravnine. Par realnih izvodnica u toj ravnini pada skupa, a zove se taj pravac, kao što znademo, torzalan pravac. Torzalni pravci t_1, t_1 sijeku dvostruki pravac a u kuspidalnim točkama K_1, K_2.

Kod ovakovih ploha 4. reda su oba pravca dvostruka i na svakom od njih mogu postojati analogne dvije kuspidalne točke s pripadna dva torzalna pravca.

Kako u literaturi nije posvećena osobita pažnja ovom imaginarnom sastavnom dijelu ovakovih pravčastih ploha, zaokupio je on moj interes. Najviše me je interesiralo postoje li i kada na izoliranom dijelu dvostrukog pravca točke, kojima prolazi par izotropnih izvodnica ove plohe? Analogno kao na nepravčastim plohama 2. reda nazvane su ove točke kružnim točkama. Kao što je poznato, postoje na pr. na troosnom elipsoidu četiri točke, u kojima tangencijalna ravnina siječe taj elipsoid u paru izotropnih pravaca. Pomičemo li naime tu ravninu paralelno na stranu elipsoida, sjeći će svaka takova ravnina u novom položaju taj elipsoid u kružnici. Na kugli su sve točke kružne.

Bitna oznaka ovakovih kružnih točaka na pravčastim plohama 3. reda je ta, da se svih ∞^2 čunjosjeka ovakove plohe projicira iz te točke u kružnice, na ravnine paralelne s ravninom izotropnih izvodnica te kružne točke. Dakle posvema analogno kao kod nepravčastih ploha 2. reda, ili kod stereografske projekcije kugle. Istraživanjem problema kružnih točaka došlo se je do ovih rezultata:

a) Kružne točke mogu postojati samo na onim pravčastim plohama 3. reda s realnim torzalnim pravcima, kod kojih je najkraća udaljenost jednostrukog i dvostrukog pravca manja od polovine udaljenosti dvostrukih točaka involucije na jednostrukom pravcu, u kojoj taj pravac sijeku parovi realnih izvodnica te plohe.

b) Nuždan i dovoljan uvjet za kružnu točku na konoidu 3. reda je taj, da su mu torzalni pravci realni i jedan na drugom okomiti.

Konoid 3. reda je takova pravčasta ploha, kojoj je jednostruki pravac u neizmjernosti. Najpoznatiji i najinteresantniji konoid 3. reda je Plückerov konoid. Presiječemo li uspravan kružni valjak ravninom i u svakoj točki toga presjeka postavimo okomicu na jednu određenu izvodnicu toga valjka, onda je ta izvodnica dvostruki pravac Plückerovog konoida, kojemu su ove okomice izvodnice. Kod ovog konoida već je davno poznata činjenica, da mu se svi čunjosjeci projiciraju paralelno s dvostrukim pravcem u kružnice, i to na ravnine paralelne s ravninama parova izvodnica ovoga konoida. Naša kružna točka nalazi se dakle u neizmjerno dalekoj točki njegovog dvostrukog pravca.

Govoreći o Plückerovom konoidu donijet ćemo još neke rezultate, koji se tiču toga konoida, a u vezi su s imaginarnim geometrijskim elementima. Siječemo li taj konoid paralelnim ravninama, pa te presjeke projiciramo u smjeru dvostrukog pravca na neku direkcionu ravninu, dobit ćemo na toj ravnini ∞^1 cirkularnih krivulja 3. reda roda nultoga, koje sve zajedno imaju isti četverostruki fokus. Siječemo li takav konoid ravninama paralelnim s nekim pravcem, pa te presjeke projiciramo kao i malo prije na jednu direkcionu ravninu, ležat će ∞^1 dobivenih četverostrukih fokusa tih cirkularnih krivulja na jednoj kružnici. Polumjer i središte te kružnice lako se mogu

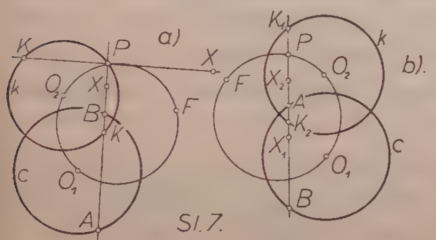
odrediti. Analogna razmatranja mogu se izvršiti i na svim sličnim konoidima s Plückerovim, ali sve to bit će potanje objelodanjeno, kada za to dođe vrijeme. Problem kružnih točaka na pravčastim plohama 4. reda mnogo je teži i opširniji od onoga na takovim plohama 3. reda. Na takovim plohama ne mogu se sigurno općeno nalaziti više od četiri kružne točke. Na onima koje imaju dvostruki pravac, ne mogu se na jednom takovom pravcu nalaziti sigurno više od dvije kružne točke. Kod nekih specijalnih ovakovih ploha postoji zanimiva povezanost kružnih presjeka s kružnim točkama. U glavnome je kod tih ploha u tom smislu otvoreno još široko polje rada.

U vezi s kružnim točkama na pravčastim plohama 3. i 4. reda zanimivo je spomenuti i slijedeće: U nekoj linearnoj hiperbolnoj kongruenciji ima ∞^5 pravčastih ploha 3. reda i ∞^7 pravčastih ploha 4. reda. Među ovima ima ∞^4 ploha 3. reda i ∞^6 ploha 4. reda na kojima se nalaze kružne točke. Među ovakovim plohama 4. reda ima ih ∞^5 takovih, kod kojih će se njihovi čunjosjeci projicirati iz kružne točke na odgovarajuću ravninu u pramen koncentričnih kružnica. U parabolnoj linearnoj kongruenciji vrijedi za plohe 4. reda isto kao u hiperbolnoj, dok u kongruenciji bisekanata kubnog čunjosjeka ima ∞^5 pravčastih ploha 4. reda, od kojih ∞^4 posjeduju kružne točke.

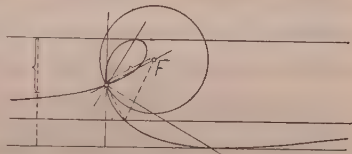
Govoreći o pravčastim plohama u vezi s imaginarnim elementima, moramo spomenuti i takove pravčaste plohe, koje se sastoje iz samih imaginarnih elemenata i to baš izotropnih pravaca. Uzmemo li dva mimosmjerna pravca i neki čunjosjek u prostoru tako, da se međusobno ne sijeku, tada znademo, da svi pravci prostora, koji ta tri elementa sijeku, čine neku pravčastu plohu 4. reda. Ako pravci ostanu realni, a umjesto običnog uzmemo apsolutni čunjosjek, onda smo dobili pravčastu plohu 4. reda s dva dvostruka realna pravca, kojoj su sve izvodnice parovi izotropnih pravaca. Uzmemo li nadalje jedan kubni čunjosjek i apsolutni čunjosjek, tada svi imaginarni pravci prostora, koji sijeku ova dva čunjosjeka, čine neku plohu 8. reda, kojoj je taj kubni čunjosjek četverostruka krivulja, a svakom njegovom točkom prolaze dva para njenih izotropnih izvodnica.

Spomenuli smo u početku cirkularne krivulje. Ovakove krivulje 3. reda roda nultoga i neke 4. reda roda nultoga mogu

se konstruktivno dobiti pomoću t. zv. posveopćene kvadratne inverzije jedne kružnice na nekoj drugoj kružnici. Zadajmo po volji neke kružnice c i k, a na posljednjoj i neku točku P. Svaka zraka točke P siječe kružnicu c u nekom realnom ili imaginarnom paru točaka A, B, a kružnicu k u drugoj točki K. Potražimo li sada na svim tim zrakama one točke X, koje su konjugirano pridruženi polovi točaka K, (ako je A, B realno onda je $(ABKX) = -1$), onda sve te točke leže na nekoj cirkularnoj krivulji 3. reda roda nultoga. Označimo li središta kružnica c, k s O_1, O_2, a točkama O_1, O_2, P povućemo kružnicu, tada je zanimivo kod tih krivulja, da će ona točka F na toj kružnici, za koju vrijedi $(O_1 P O_2 F) = -1$, biti četverostruki fokus te krivulje. Sl. br. 7 a).



Sl. 7.


Sl 8.

Ne leži li točka P na kružnici k, onda će svaka njena zraka sjeći tu kružnicu u dvije točke K_1, K_2, a njima pridružene točke X_1, X_2 na gore spomenuti način sačinjavat će neku cirkularnu krivulju 4. redo roda nultoga. Za četverostruki fokus ovakovih krivulja vrijedi također gornji harmonijski dvoomjer. Sl. br. 7 b).

Neka svojstva ovakovih krivulja mogu se vrlo lako dobiti pomoću prostornih razmatranja na pravčastim plohama, ako te krivulje smatramo projekcijama ravninskih presjeka tih ploha iz kružne točke na određenu ravninu. Pomoću takovih razmatranja može se četverostruki fokus unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda dobiti i ovako: Dirališta paralelnih tengenata s asimptotom te krivulje spojimo s njenom dvostrukom točkom (kod cirkularnih krivulja su to okomiti pravci), a iz te točke postavimo okomicu na asimptomu. Preklopimo li ovu okomicu oko one jedne spojnice na suprotnu stranu i na taj pravac nanesemo od dvostruke točke polovicu udaljenosti između tange-

nata te krivulje paralelnih s asiptomom, dobivamo četverostruki fokus te krivulje. Sl. br. 8. Prenesti treba spomenutu dužinu uvijek na stranu vitice te krivulje. Kod ovog posljednjeg rezultata malo je neobično, da je on posve metričke naravi, ali ovi metrički odnosi dobiveni su iz prostornih odnosa na pravčastim plohama 3. reda. Posvema analogno možemo dobiti i četverostruki fokus unikurzalnih cirkularnih krivulja 4. reda, dobivenih na spomenuti način.

Kod ovakovog razmatranja unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda zapažena je kod njih jedna osobita kružnica, kojoj je središte u četverostrukom fokusu, a prolazi dvostrukom točkom te krivulje. Svaka unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda može se smatrati cisoidom ove kružnice i svoje asimptote. Odavle direktno slijedi, da su uvijek dvostruka točka, četverostruki fokus i sjecište krivulje s asimptotom, vrhovi pravokutnog trokuta, kojemu je u dvostrukoj točki pravi kut, a kateta do četverostrukog fokusa jednaka polovici udaljenosti između tangenata paralelnih s asimptotom.

Analogno kao što cirkularne krivulje prolaze apsolutnim točkama svoje ravnine, mogu i neke opće nepravčaste plohe prolaziti apsolutnim čunjosjekom. Razlika između ovih i običnih nepravčastih ploha je u glavnom takova, kao što je na pr. razlika između troosnog elipsoida i kugle kod ploha drugoga reda. Provedemo li analogno posveopćenu prostornu kvadratnu inverziju, kao što smo ju malo prije opisali u ravnini, i to tako da mjesto kružnica c i k uzmemo kugle C i K, a centar inverzije P uzmemo negdje na kugli K ili izvan nje, tada ćemo u prvom slučaju dobiti opću plohu 3. reda s jednom dvostrukom točkom, a u drugom slučaju opću plohu 4. reda s jednom dvostrukom točkom i jednom dvostrukom kružnicom, koje prolaze apsolutnim čunjosjekom. Svi presjeci ovakovih ploha su cirkularne krivulje 3., odnosno 4. reda. Treba ovdje spomenuti, da četverostruki fokusi svih presjeka s nekim pramenom paralelnih ravnina leže na nekom pravcu, koji je okomit na smjeru tih ravnina. Smjerova ravnina ima ∞^2, dakle je uz svaku ovakovu plohu 3. ili 4. reda vezana jedna kongruencija ovakovih pravaca.

Nalazi li se točka P na spojnici središta kugala C i K, tada će tom našom posveopćenom inverzijom izvedena ploha biti ro-

taciona. Spomenuta kongruencija pravaca prelazi ovdje u snop pravaca, čiji se vrh nalazi na osi plohe i to u četverostrukom fokusu svih meridijanskih presjeka. Na temelju malo prije spomenutoga izlazi, da svi ravninski presjeci ove točke imaju u njoj svoj četverostruki fokus. Sve ravnine dvostruke točke sijeku takove plohe u unikurzalnim cirkularnim krivuljama. Četverostruki fokusi ovih ∞^2 krivulja nalaze se kod ovakovih rotacionih ploha na nekoj kugli, koja ima središte na osi, a prolazi dvostrukom točkom i spomenutim vrhom. Postavimo li dvostrukom točkom obične nerotacione ovakove plohe svih ∞^2 ravnina, tada četverostruki fokusi ovakovih unikurzalnih presječnih krivulja leže na nekoj plohi 5. reda. Ova ploha ima uz ostala zanimiva svojstva jednu hiperbolnu i jednu eliptičku biplanarnu točku. To su takove dvostruke točke, kod kojih se njihov tangencijalni stožac 2. reda raspada u par realnih, odnosno imaginarnih ravnina.

Vidjeli smo kod rotacionih ploha 3. i 4. reda, koje prolaze apsolutnim čunjosjekom, da četverostruke fokuse presjeka ovakovih ploha možemo zapravo dobiti kao okomite projekcije izvjesne točke osi na te ravnine. Ova je točka na osi, kao što već znademo, četverostruki fokus svih meridijanskih presjeka te plohe. Ovaj zajednički četverostruki fokus, odnosno vrh poznatog snopa pravaca, može biti i u tjemenu na samoj toj plohi. Sve ravnine ove točke sjeći će prema tome ovakovu plohu 3. reda u Lagrangeovim strofoidalama.

Među općim plohama 3. reda koje prolaze apsolutnim čunjosjekom ima međutim i takovih ploha, koje ovakovu točku imaju na svojoj površini, ma da nisu rotacione. Zamislimo si u prostoru tri točke P, A i B, od kojih točke A, B mogu biti ili realne, ili imaginarne, a mogu pasti i skupa. Postavimo sada točkama A, B svih ∞^2 kugala. Točku P spojmo sa središtem svake te kugle i tom spojnicom probodimo tu kuglu. Sva ovakova probodišta leže na nekoj općoj plohi 3. reda, koja prolazi apsolutnim čunjosjekom. Ta će ploha biti dvodjelna, jednodjelna ili će imati dvostruku točku prema tome, jesu li točke A, B realne, imaginarne ili padaju skupa. Radi analogije sa strofoidalama nazvane su ovakove plohe strofoidalnim plohama 3. reda. Točka P na ovakovim plohama je vrh imaginarnog stošca 2. reda, koji tu plohu tangira duž apsolutnog čunjosjeka. Svi ravninski presjeci kroz ovu točku su Lagran-

geove strofoidale, jer im je točka P četverostruki fokus. Usporedimo li ovakovu plohu s kuglom, tada točka P odgovara središtu te kugle, jer je i to središte vrh imaginarnog tangencijalnog stošca kugle duž apsolutnog čunjosjeka. Ova istaknuta činjenica točke P daje ovoj plohi i daljnje bitne oznake kugle. Na pr. četverostruki fokus svakog ravninskog presjeka ove plohe je okomita projekcija točke P na ravninu toga presjeka. Odavle direktno izlazi analogija s kuglom za sve ravninske presjeke kroz jednu točku i kroz neki pravac. Uz točku P imaju ovakove plohe daljnjih šest kružnih točaka, među kojima se nalaze i točke A, B. Vrlo lako se može naći broj i geometrijsko mjesto ravnina, koje ovakove plohe sijeku u strofoidalama, a prolaze jednim pravcem ili jednom po volji uzetom točkom.

Među općim plohama 3. i 4. reda, koje prolaze apsolutnim čunjosjekom, postoje međutim i takove, kojima se vrh ovakovog imaginarnog tangencijalnog stošca duž apsolutnog čunjosjeka nalazi izvan njihove površine. Njih se može dobiti cisoidalnim putem iz neke kugle i ravnine analogno kao cisoidu iz kružnice i pravca. Središte te kugle bit će vrh toga imaginarnog stošca. Te su plohe 3. ili 4. reda prema tome, da li se točka P nalazi ili ne nalazi na kugli. Daljnjim razmatranjem ovih ploha ne možemo se ovdje baviti, a niti je to potrebno, jer će o njima biti govora pobliže u drugo vrijeme i na drugom mjestu.

Završavajući moram napomenuti, da odabirući gradivo za ovaj kolokvij, nisam se mogao odhrvati želji da ne iskoristim priliku, pa da se bar donekle otputim u golemo i neizmjerno bogato carstvo matematski definiranih ploha i krivulja, kod kojih baš njihovi imaginarni sastavni dijelovi odlučuju o bogatstvu i raznolikosti oblika njihovih realnih dijelova. Sjetimo se samo kuspidalnih točaka i torzalnih pravaca kao prelaznih mjesta pravčastih ploha s njihovog realnog dijela na imaginarni, ili kružnih točaka općih ploha kao prelazna mjesta s realnih cikličkih presjeka na imaginarne takove presjeke i t. d. Imajući ovo u vidu smatrao sam i zgodnim i potrebnim, da se otputim upravo u ovo područje geometrije u vezi s imaginarnim elementima, donesavši usput i neke s time povezane rezultate, povađene iz nekih objelodanjenih radova, kao i iz nekih neobjelodanjenih, koji će izaći kada to bude moguće.

RÉSUMÉ

Les éléments imaginaires en géométrie

Par V. Niče

On ne parlera que des éléments imaginaires de première espèce. Ce seront des points, des droites, des plans et aussi des cônes et des coniques, surtout la conique absolue. Les propriétés de certaines lignes, surfaces réglées et non-réglées seront considérées en relation avec ces éléments qui peuvent faire partie de ces lignes ou surfaces.

Les éléments imaginaires de première espèce caractérisés par des coordonnées de Descartes sont comparés aux éléments imaginaires en géométrie projective représentés, d'après Staudt, à l'aide d'involutions.

Après avoir considéré deux points complexes conjugués comme points d'intersection d'une droite et d'une conique et deux droites complexes conjuguées comme tangentes imaginaires d'une conique menées par un point interne, nous donnons quelques résultats concernant les couples de génératrices imaginares de surfaces réglées et les tangentes imaginaires aux points absolus de lignes courbes, surtout circulaires. La génération et quelques propriétés de certaines surfaces générales de 3. et 4. ordre, contenant la conique absolue, sont discutées. Les propriétés exposées sont liées à la conique absolue et aux droites isotropes comme génératrices ou tangentes de ces surfaces ou de leurs coupures. L'attention est portée sur les foyers quadruples des courbes considérées. Voici les propriétés trouvées: Sur la partie isolée de la droite double de certaines surfaces réglées de 3. ordre peuvent exister des points qui sont l'intersection d'une paire de génératrices isotropes de la surface. Par analogie de tels points sont nommés points circulaires (ombilics), car leurs propriétés sont analogues à celles des points circulaires des surfaces non-réglées de 2. ordre.

Des points circulaires sur les surfaces réglées de 3. ordre ne peuvent exister que si la plus courte distance entre la droite double et la droite simple est moindre que la moitié de la distance entre les points d'intersection des droites torsales et la droite simple.

Pour qu'il existent des points circulaires d'un conoïde de 3. ordre, il faut et il suffit que les droites torsales réélles soient normales entre elles.

Le fait connu est mentionné que sur le conoïde de Plücker il y a un point circulaire infiniment éloigné. Pour ce conoïde nous donnons les propriétés suivantes, inconnues, à ce qu'il paraît: Les projections des coupures d'un tel conoïde avec des plans parallèles sur un plan directeur, en direction de la droite double, sont des courbes circulaires unicursales de 3. ordre ayant un foyer quadruple commun. Les projections des coupures du conoïde avec tous les plans parallèles à une droite ont des foyers qui se trouvent sur un cercle dont on trouve aisément le rayon et le centre. Tous les conoïdes de 3. ordre qui ont des points circulaires jouissent de propriétés analogues.

Le problème des points circulaires des surfaces réglées de 4. ordre est beaucoup plus compliqué. Il ne peut y avoir plus que quatre points circulaires et quelques espèces de ces surfaces montrent une connexion intéressante entre ces points circulaires et les coupures circulaires.

Dans une congruence linéaire hyperbolique il y a ∞^5 de surfaces réglées de 3. ordre et ∞^7 de surfaces réglées de 4. ordre. Parmi ces surfaces il y en a ∞^4 de 3. ordre et ∞^4 de 4. ordre qui ont des points circulaires. L'affirmation analogue est valable pour une congruence parabolique, tandis que la congruence des bissécantes d'une conique cubique ne contient que ∞^5 de surfaces réglées de 4. ordre dont ∞^4 ont des points circulaires.

Les courbes circulaires de 3. et 4. ordre de genre zéro peuvent être générées à l'aide de l'inversion quadratique généralisée. Soient c et k deux cercles donnés et P un point sur k ou dans k ou hors de k. Chaque droite menée par P coupe le cercle k en un ou deux points. Si l'on construit sur chaque droite les pôles conjugués de ces intersections par rapport au cercle c, ces pôles forment une courbe circulaire de 3. ou de 4. ordre, selon que le point P se trouve ou ne se trouve pas sur le cercle k. Soient O_1, O_2 les centres des cercles c, k et soit F le foyer quadruple d'une de ces courbes. Les points O_1, O_2, F sont concycliques et leur rapport anharmonique est $(O_1 P O_2 F) = -1$. Certaines propriétés de telles courbes peuvent être

obtenues en considérant ces courbes comme projections des coupures de surfaces réglées, le centre de projection étant un point circulaire de la surface. Le foyer quadruple d'une courbe circulaire de 3. ordre de genre zéro peut être obtenu comme il suit: Joignons les points tangentiels des tangentes parallèles à l'asymptote avec le point double de la courbe (ces deux droites de jonction sont normales entre elles), traçons la normale à l'asymptote par ce point double. Construisons une droite symétrale à cette normale par rapport à une des lignes de jonction comme axe de symétrie. Sur cette droite, du coté du lacet de la courbe, se trouve le foyer quadruple de la courbe éloigné du point double d'une moitié de la distance entre les deux tangentes parallèles.

Il est aisé de voir que toute courbe circulaire de 3. ordre de genre zéro est une cissoïde qui est générée par son asymptote et le cercle, donné par le foyer quadruple comme centre et le point double comme point de périphérie. Il s'en suit immédiatement que le foyer quadruple, le point double et le point d'intersection de la courbe avec son asymptote forment un triangle rectangle dont l'angle droit est au point double.

En remplaçant les cercles c et k par des sphères C et K, on obtient l'inversion généralisée dans l'espace qui fournit, d'une manière analogue, des surfaces de 3. ordre avec un point double et des surfaces de 4. ordre avec un point double et un cercle double. Ces surfaces contiennent la conique absolue. Les coupures de ces surfaces sont des courbes circulaires. Les foyers quadruples des coupures par des plans parallèles sont situés sur une droite, normale à ces plans. Donc à chacune de ces surfaces une congruence de droites est adjointe. Si le point P est situé sur la droite de jonction des centres de sphères C, K, on obtient une surface de rotation. La congruence des droites devient une gerbe de droites dont le support est le foyer quadruple de toutes les coupures méridiennes de la surface. Bien des analogies avec les sphères en découlent. Par exemple les foyers quadruples de toutes les sections menées par le point double de ces surfaces de rotation forment une sphère. Les foyers quadruples de telles sections des surfaces plus générales sont situés sur une surface de 5. ordre qui a deux points doubles biplanaires, l'un elliptique, l'autre hyperbolique.

Il y a aussi des surfaces de 3. ordre conterrant la conique absolue qui ne sont pas de rotation et qui ont un tel point caractéristique, c'est à dire qu'on obtient le foyer quadruple d'une coupure quelconque comme projection orthogonale de ce point dan le plan de la coupure. Ce point est le support de la congruence de droites dégénérée en gerbe.

Soit donnée une sphère, un point P sur elle et un plan quelconque. Chaque rayon par ce point donne un point d'intersection avec le plan et un deuxième point sur la sphère. A partir du plan on porte sur ce rayon la distance du point P au deuxième point d'intersection avec la sphère en même direction. Les points obtenus sur tous les rayons forment une surface générale de 3. ordre qui contient la conique absolue et possède un point double. Le centre de la sphère donnée est le support de la gerbe mentionnée et en vérité, c'est le sommet d'un cône imaginaire touchant la surface le long de la conique absolue. On trouve aisément les droites et les points circulaires de ces surfaces.

Soient P, A, B trois points donnés dans l'espace, dont A, B peuvent être réels, imaginaires ou confondu. Chacune des ∞^2 sphères passant par les points A, B donne deux points d'intersection avec la droite joignant son centre et le point P. Tous ces points d'intersection forment une surface générale de 3. ordre qui contient la conique absolue. Cette surface est à deux nappes (elle a un oval), à une nappe ou bien elle a un point double, selon que la paire de points A, B est réelle, imaginaire ou confondue. La surface passe par le point P qui est encore le support de la gerbe mentionnée, c'est-à-dire le sommet d'un cône tangentiel imaginaire touchant la surface le long de la conique absolue. Les points P, A, B sont des points circulaires et la surface peut avoir encore quatre autres points circulaires. Par analogie avec les strophoïdales cette surface est nommée surface strophoïdale de 3. ordre.

Il y a des surfaces générales de 3. ordre ayant un cône tangentiel imaginaire qui les touche le long de la conique absolue mais le sommet réel de ce cône est situé hors de la surface. Une certaine espèce de surfaces générales de 4. ordre contient aussi des surfaces jouissant de la même propriété.

Les résultats mentionnés sont en partie déjà publiés ailleurs et le reste sera exposé ultérieurement.

Dr Драгослав С. Митриновић, Скопље

О ЈЕДНОЈ ЛИНЕАРНОЈ ПАРЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ

ГЛАВА ТРЕЋА

IV. Посматрајмо функцију

$$z = x^{a_1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{a_2} f_2\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots + x^{a_n} f_n\left(\frac{y}{x}\right) \tag{17}$$

тј.
$$z = \sum_{k=1}^{n} x^{a_k} f_k\left(\frac{y}{x}\right),$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дате различите константе, а $f_1, f_2, \ldots, f_n$ произвољне функције аргумента $\frac{y}{x}$.

Показаћемо да је могућно образовати једну једину релацију између промењљивих x и y, функције z и њених парцијалних извода. Та релација биће независна од облика функција $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Да бисмо то постигли, поћи ћемо од релације (17) и користићемо се теоремом о хомогеним функцијама.

Дакле, можемо написати овај низ једнакости:

$$F_1 = xp + yq \quad = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{a_k} f_k,$$

$$F_2 = (xp + yq)^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k - 1) x^{a_k} f_k,$$

$$F_3 = (xp + yq)^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k - 1)(a_k - 2) x^{a_k} f_k,$$

. . . .

$$F_n = (xp + yq)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k - 1)(a_k - 2) \ldots (a_k - n + 1) x^{a_k} f_k,$$

тј.

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \sum_{k=1}^{n} a_k\, x^{a_k} f_k\,, \\
F_2 &= 2!\sum_{k=1}^{n} \binom{a_k}{2} x^{a_k} f_k\,, \\
F_3 &= 3!\sum_{k=1}^{n} \binom{a_k}{3} x^{a_k} f_k\,, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F_n &= n!\sum_{k=1}^{n} \binom{a_k}{n} x^{a_k} f_k\,,
\end{aligned} \tag{18}
$$

Елиминацијом n параметара $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из $(n+1)$ релација (17) и (18), долази се до једначине:

$$
\begin{vmatrix}
z & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
F_1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\
F_2 & 2!\binom{a_1}{2} & 2!\binom{a_2}{2} & \ldots & 2!\binom{a_n}{2} \\
F_3 & 3!\binom{a_1}{3} & 3!\binom{a_2}{3} & \ldots & 3!\binom{a_n}{3} \\
. & . & . & \ldots & . \\
F_n & n!\binom{a_1}{n} & n!\binom{a_2}{n} & \ldots & n!\binom{a_n}{n}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Ако детерминанту која се јавља у последњој једначини развијемо по елементима прве колоне, долазимо до једначине

$$
\begin{aligned}
\Delta_0 z - \Delta_1 (x p + y q) + \Delta_2 (x p + y q)^{(2)} - \Delta_3 (x p + y q)^{(3)} + \ldots \\
+ (-1)^n \Delta_n (x p + y q)^{(n)} = 0,
\end{aligned} \tag{19}
$$

где су $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ детерминанте реда n чије вредности зависе од $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Најпре имамо[1])

$$\Delta_0 = 2!\ 3!\ 4! \dots n! \left\| \begin{matrix} a_1 \\ \binom{a_1}{2} \\ \binom{a_1}{3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \binom{a_1}{n} \end{matrix} \right\|$$

тj.

$$\Delta_0 = \left\| \begin{matrix} a_1 \\ a_1(a_1-1) \\ a_1(a_1-1)(a_1-2) \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1(a_1-1)(a_1-2)\dots(a_1-n+1) \end{matrix} \right\| .$$

Алтернанта Δ_0 има вредност[2]) :

$$\Delta_0 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n \cdot P,$$

где je P производ:

$$\begin{aligned} P = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)&\dots(a_n-a_1) \\ (a_3-a_2)(a_4-a_2)&\dots(a_n-a_2) \\ (a_4-a_3)&\dots(a_n-a_3) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &(a_n-a_{n-1}). \end{aligned}$$

Детерминанте $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ jecy такође алтернанте.

---

[1]) Ради краткоће у писању, договоримо се да нам убудуће симбол

$$\left\| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda \end{matrix} \right\|$$

означава детерминанту из чије је матрице наведена само прва колона.

[2]) Богдан Гавриловић, **Теорија детерминаната**, стр. 162 (Београд, 1899).

Δ_n је дефинисано детерминантом

$$\left\| \begin{array}{l} 1 \\ a_1 \\ a_1 (a_1 - 1) \\ a_1 (a_1 - 1)(a_1 - 2) \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1 (a_1 - 1)(a_1 - 2) \ldots (a_1 - n + 2) \end{array} \right\|$$

чија је вредност

$$\Delta_n = P,$$

где је P производ који смо горе дефинисали.

Послужићемо се сада једном теоремом[1] која се односи на алтернанте: свака алтернанта A

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(a_1) & \varphi_0(a_2) & \ldots & \varphi_0(a_n) \\ \varphi_1(a_1) & \varphi_1(a_2) & \ldots & \varphi_1(a_n) \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \varphi_{n-1}(a_1) & \varphi_{n-1}(a_2) & \ldots & \varphi_{n-1}(a_n) \end{vmatrix}$$

може се без остатка поделити производом P. Количник $\frac{A}{P}$ је симетрична функција по

$$a_1, a_2, \ldots a_n.$$

Према изложеном једначина (19) добија облик

$$S_0 z - S_1 (xp + yq) + S_2 (xp + yq)^{(2)} - S_3 (xp + yq)^{(3)} + \ldots.$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} S_{n-1} (xp + yq)^{(n-1)} + (-1)^n (xp + yq)^{(n)} = 0,$$

где су $\quad S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$

симетричне функције по

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

тј.

$$S_k = \frac{\Delta_k}{P}.$$

[1] Богдан Гавриловић, **Теорија детерминаната,** стр. 164 (Београд, 1899).

Отуда можемо исказати овај

Став. Линеарна парцијална једначина реда n

$$S_0 z = S_1 (xp + yq) - S_2 (xp + yq)^{(2)} + \ldots + (-1)^n S_{n-1} (xp + yq)^{(n-1)} + \\ + (-1)^{n+1} (xp + yq)^{(n)},$$

где je

$$S_0 = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n,$$

$$S_k = \frac{1}{P} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 \\ a_1 \\ a_1 (a_1 - 1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1 (a_1 - 1)(a_1 - 2) \ldots (a_1 - k + 2) \\ a_1 (a_1 - 1)(a_1 - 2) \ldots (a_1 - k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1 (a_1 - 1)(a_1 - 2) \ldots (a_1 - n + 1) \end{matrix} \right\|$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n - 1),$$

има за општи интеграл

$$z = x^{a_1} f_1 \left(\frac{y}{x}\right) + x^{a_2} f_2 \left(\frac{y}{x}\right) + \ldots + x^{a_n} f_n \left(\frac{y}{x}\right),$$

где су $f_1, f_2, \ldots, f_n$ произвољне функције назначеног аргумента.

V. Посматраћемо сада неке партикуларне случајеве.

1. Пођимо од релације ($a \neq b$)

$$z = x^a f_1 + x^b f_2 \tag{20}$$

$$\left(f_1 = f_1 \left(\frac{y}{x}\right), \quad f_2 = f_2 \left(\frac{y}{x}\right) \right),$$

из које следује

$$xp + yq = a x^a f_1 + b x^b f_2, \tag{21}$$

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = a (a - 1) x^a f_1 + b (b - 1) x^b f_2. \tag{22}$$

Резултат елиминације f_1 и f_2 из релација (20), (21) и (22) дат је једначином

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 1 \\ xp+yq & a & b \\ x^2r+2xys+y^2t & a(a-1) & b(b-1) \end{vmatrix} = 0.$$

После развијања детерминанте, која се налази на левој страни последње једначине, има се

$$z = \frac{a+b-1}{ab}(xp+yq) - \frac{1}{ab}(x^2r+2xys+y^2t).$$

Према томе имамо овај резултат:

Општи интеграл парцијалне једначине

$$x^2r+2xys+y^2t-(a+b-1)(xp+yq)+abz=0$$

дат је релацијом

$$z = x^a f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^b f_2\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (a \neq b),$$

где су f_1 и f_2 произвољне функције назначеног аргумента.

Кад је $a=1, \quad b=2,$

долазимо до резултата напред наведеног, тј. функција:

$$z = x f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 f_2\left(\frac{y}{x}\right)$$

јесте општи интеграл једначине

$$z = xp+yq-\frac{1}{2!}(x^2r+2xys+y^2t).$$

2. Уочимо сада релацију

$$z = x^a f_1 + x^b f_2 + x^c f_3, \tag{23}$$

где су a, b, c три различите константе, а f_1, f_2, f_3 три ма какве функције од $\frac{y}{x}$.

Из (23) излази

$$\begin{aligned} xp+yq &= a x^a f_1 + b x^b f_2 + c x^c f_3, \\ (xp+yq)^{(2)} &= a(a-1) x^a f_1 + b(b-1) x^b f_2 + c(c-1) x^c f_3, \\ (xp+yq)^{(3)} &= a(a-1)(a-2) x^a f_1 + b(b-1)(b-2) x^b f_2 + \\ &\quad + c(c-1)(c-2) x^c f_3. \end{aligned} \tag{24}$$

Ако се из релација (23) и (24) елиминишу f_1, f_2, f_3, добија се

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ xp+yq & a & b & c \\ (xp+yq)^{(2)} & a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \\ (xp+yq)^{(3)} & a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) \end{vmatrix} = 0,$$

тј.

$$\Delta_0 z - \Delta_1 \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \Delta_2 \left(x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) -$$

$$- \Delta_3 \left(x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3x^2 y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3xy^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right),$$

где Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3 имају ове вредности:

$$\Delta_0 = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ (a-1)(a-2) & (b-1)(b-2) & (c-1)(c-2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \\ a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \end{vmatrix}.$$

Горње алтернанте, у развијеном облику, претстављене су изразима

$$\Delta_0 = abc(b-a)(c-a)(c-b),$$

$$\Delta_1 = (b-a)(c-a)(c-b)[(ab+bc+ca)-(a+b+c)+1],$$

$$\Delta_2 = (b-a)(c-a)(c-b)[(a+b+c)-3],$$

$$\Delta_3 = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Из изложеног изводи се овај закључак:

Општи интеграл линеарне парцијалне једначине трећег реда

$$abcz = [(ab+bc+ca) - (a+b+c) + 1]\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) -$$
$$- [(a+b+c) - 3]\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) +$$
$$+ \left(x^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3x^2y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + 3xy^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + y^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)$$

дат је релацијом

$$z = x^a f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^b f_2\left(\frac{y}{x}\right) + x^c f_3\left(\frac{y}{x}\right).$$

ГЛАВА ЧЕТВРТА

VI. У претходној глави овог рада решили смо проблем:

Одредити парцијалну једначину чији је општи интеграл

$$z = \sum_{k=1}^{n} x^{a_k} f_k\left(\frac{y}{x}\right),$$

где су a_k различите константе, f_k произвољне функције назначеног аргумента.

Поставимо сада обрнути проблем:

Одредити општи интеграл парцијалне једначине

$$(xp+yq)^{(n)} + \alpha_1 (xp+yq)^{(n-1)} + \ldots + \alpha_{n-1}(xp+yq) + \alpha_n z = 0,$$

где су α_k дате константе.

Решење обрнутог проблема навели смо у Уводу овог рада. Овде ћемо проучити неке партикуларне случајеве.

1. Уочимо парцијалну једначину

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = \alpha(xp+yq) + \beta z, \tag{25}$$

где су α и β ма какве константе, и потражимо општи интеграл те једначине.

У претходној глави смо нашли да је функција

$$z = x^a f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^b f_2\left(\frac{y}{x}\right) \tag{26}$$

општи интеграл парцијалне једначине

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = (a + b - 1)(xp + yq) - abz. \tag{27}$$

Упоређењем једначине (25) и (27) долази се до релација

$$a + b = \alpha + 1,$$
$$ab = -\beta,$$

што значи да су a и b корени квадратне једначине

$$t^2 - (\alpha + 1)t - \beta = 0. \tag{28}$$

То је карактеристична једначина придружена задатој парцијалној једначини (25).

Према томе, под условом да је

$$(\alpha + 1)^2 + 4\beta \neq 0, \quad \text{тj.} \quad a \neq b,$$

општи интеграл парцијалне једначине (25) дефинисан је релацијом (26), где су a и b корени карактеристичне једначине (28).

Поставља се питање како ћемо наћи општи интеграл једначине (25) ако карактеристична једначина (28) има једнаке корене, тј. у случају ако је

$$(\alpha + 1)^2 + 4\beta = 0. \tag{29}$$

С обзиром на услов (29) уместо α и β можемо ставити

$$\alpha = 2m - 1,$$
$$\beta = -m^2,$$

где је m један параметар.

Једначина (25) тада постаје

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = (2m - 1)(xp + yq) - m^2 z. \tag{30}$$

Ако се стави

$$xp + yq = u,$$

једначина (30) је еквивалентна *Charpit*-овом систему

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = u,$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2mu - m^2 z.$$

Одговарајући систем обичних диференцијалних једначина гласи:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{2mu - m^2 z}. \tag{31}$$

Два интеграла система (31) јесу

$$\frac{y}{x} = C_1, \tag{32}$$

$$\frac{mz - u}{x^m} = C_2, \tag{33}$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе.

Да бисмо нашли још један интеграл система (31), пођимо од једначине

$$\frac{dz}{u} = \frac{du}{2mu - m^2 z}.$$

Према (33) последња једначина постаје

$$\frac{dz}{dx} - \frac{m}{x} z - C_2 x^{m-1} = 0.$$

Општи интеграл последње једначине је

$$z = C_3 x^m + C_2 x^m \log x, \tag{34}$$

где је C_3 нова интеграциона константа.

С обзиром на (33), једначина (34) добија облик

$$\frac{z - (mz - u)\log x}{x^m} = C_3.$$

Општи интеграл *Charpit*-овог система је

$$\frac{z - (mz - u)\log x}{x^m} = f_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{mz - u}{x^m} = f_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ако се из последњих двеју релација елиминише параметар u, добија се

$$z = x^m \left[f_1\left(\frac{y}{x}\right) + f_2\left(\frac{y}{x}\right) \log x \right],$$

а то је општи интеграл једначине (25), за случај када њена карактеристична једначина има двојни корен m.

2. Посматрајмо једначину

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = n(xp + yq) - nz \tag{35}$$

$$(n = \text{const.}).$$

Charpit-ев систем, у овом случају, гласи

(36)
$$
\begin{aligned}
x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= u \\
x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} &= (n+1)\, u - n z,
\end{aligned}
$$

одакле је

(37)
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{(n+1)\, u - nz}.$$

Један интеграл система (37) је

$$\frac{y}{x} = C_1 \qquad (C_1 = \text{const.}).$$

Из система (37) може се створити интеграбилна комбинација

$$\frac{d\,(nz - u)}{nz - u} = \frac{dx}{x},$$

одакле је

$$\frac{nz - u}{x} = C_2 \qquad (C_2 = \text{const.}).$$

Исто тако, имамо и ову интеграбилну комбинацију

$$\frac{d\,(z - u)}{n\,(z - u)} = \frac{dx}{x},$$

што доводи до

$$\frac{z - u}{x^n} = C_3 \qquad (C_3 = \text{const.}).$$

Према томе, општи интеграл *Charpit*-овог система (36) је

(38)
$$
\begin{aligned}
\frac{nz - u}{x} &= f\left(\frac{y}{x}\right), \\
\frac{z - u}{x^n} &= \varphi\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}
$$

После елиминације параметра *u* из (38) добија се

(39)
$$z = x\, f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f_2\left(\frac{y}{x}\right),$$

што претставља општи интеграл задате једначине (35).

Међутим, ако искористимо резултате из претходне главе, можемо лакше доћи до истог резултата (39).

Карактеристична једначина за једначину (35) гласи

$$t^2 - (n+1)\,t + n = 0.$$

Њени корени су

$$t_1 = 1,\ t_2 = n,$$

те се непосредно долази до резултата (39).

3. Посматрајмо сада *Bertrand*-ову парцијалну једначину[1)]

$$x^2 r + 2xys + y^2 t + xp + yq = n^2 z \qquad (n = \text{const}), \tag{40}$$

коју је Н. Салтиков интегралио помоћу *Charpit*-евог система у напред наведеном раду.

Карактеристична једначина за *Bertrand*-ову једначину гласи

$$t^2 - n^2 = 0,$$

одакле излази

$$t_1 = n, \quad t_2 = -n.$$

Према томе, општи интеграл једначине (40) је

$$z = x^n f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{-n} f_2\left(\frac{y}{x}\right),$$

а то је у сагласности са познатим резултатом.

VII. Интегралимо, на крају, парцијалну једначину трећег реда

$$\begin{aligned}(41)\quad &\left(x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3x^2 y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3xy^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + \\ &+ \alpha\left(x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \beta\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \gamma z = 0,\end{aligned}$$

где су α, β, γ три дате константе.

Тога ради упоредимо је са једначином

$$\begin{aligned}&\left(x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3x^2 y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3xy^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) - \\ &- [(a+b+c) - 3]\left(x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \\ &+ [(ab+bc+ca) - (a+b+c) + 1]\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) - abcz = 0,\end{aligned}$$

коју смо раније образовали.

---

1) J. Bertrand, *Traité de Calcul différentiel*, p. 223 (Paris, 1864).

Тако се налазе релације

$$a + b + c = 3 - \alpha,$$
$$(ab + bc + ca) - (a + b + c) = \beta - 1,$$
$$abc = -\gamma$$

тј.

$$a + b + c = 3 - \alpha,$$
$$ab + bc + ca = 2 - \alpha + \beta,$$
$$abc = -\gamma.$$

Према томе, a, b, c су корени једначине

(42) $$t^3 + (\alpha - 3)\, t^2 + (\beta - \alpha + 2)\, t + \gamma = 0.$$

Једначина (42) претставља карактеристичну једначину једначине (41).

Ако су корени t_1, t_2, t_3 једначине (42) различити, општи интеграл једначине (41) дефинисан је релацијом

$$z = x^{t_1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{t_2} f_2\left(\frac{y}{x}\right) + x^{t_3} f_3\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ако је

$$t_2 = t_3, \quad t_1 \neq t_2,$$

општи интеграл једначине (41) је

$$z = x^{t_1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{t_2}\left[f_2\left(\frac{y}{x}\right) + f_3\left(\frac{y}{x}\right)\log x\right].$$

У случају када је

$$t_1 = t_2 = t_3,$$

општи интеграл једначине (41) је

$$z = x^{t_1}\left[f_1\left(\frac{y}{x}\right) + f_2\left(\frac{y}{x}\right)\log x + f_3\left(\frac{y}{x}\right)\log^2 x\right].$$

Тако, на пример, једначини

$$\left(x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3x^2y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3xy^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) - z = 0$$

одговара карактеристична једначина

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

која има тројни корен $t = 1$.

Општи интеграл задате једначине је

$$z = x\left[f_1\left(\frac{y}{x}\right) + f_2\left(\frac{y}{x}\right)\log x + f_3\left(\frac{y}{x}\right)\log^2 x\right].$$

VIII. Напоменимо да једначини

$$(43)\qquad (xp+yq)^{(4)}+\alpha_1(xp+yq)^{(3)}+\alpha_2(xp+yq)^{(2)}+\alpha_3(xp+yq)+\alpha_4 z=0$$
$$(\alpha_k=\text{const.})$$

одговара ова карактеристична једначина

$$(44)\qquad t^4+(\alpha_1-6)\,t^3+(\alpha_2-3\,\alpha_1+11)\,t^2+ \\ +(\alpha_3-\alpha_2+2\,\alpha_1-6)\,t+\alpha_4=0.$$

Партикуларни случај једначине (43) претставља једначина

$$z=(x\,p+y\,q)-\frac{1}{2\,!}(x\,p+y\,q)^{(2)}+\frac{1}{3\,!}(x\,p+y\,q)^{(3)}-\frac{1}{4\,!}(x\,p+y\,q)^{(4)}.$$

У овом случају је

$$(45)\qquad \alpha_1=-4,\quad \alpha_2=12,\quad \alpha_3=-24,\quad \alpha_4=24.$$

Карактеристична једначина (44) за вредности (45) постаје

$$t^4-10\,t^3+35\,t^2-50\,t+24=0$$

и њени су корени

$$t_1=1,\quad t_2=2,\quad t_3=3,\quad t_4=4.$$

Према томе, општи интеграл једначине (43) је

$$z=x\,f_1\left(\frac{y}{x}\right)+x^2 f_2\left(\frac{y}{x}\right)+x^3 f_3\left(\frac{y}{x}\right)+x^4 f_4\left(\frac{y}{x}\right).$$

ГЛАВА ПЕТА

IX. До неких резултата добијених у овом раду може се доћи краћим путем увођењем оператора

$$\psi=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},$$

којим се често служе нарочито енглески математичари.

Тада ће бити

$$\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{(k)}=\psi\,(\psi-1)\,(\psi-2)\ldots\ldots(\psi-k+1)\,z.$$

Тако је, на пример,

$$(x\,p+y\,q)^{(2)}=\psi\,(\psi-1)\,z.$$

Једначини трећег реда

$$(x\,p+y\,q)^{(3)}+\alpha_1\,(x\,p+y\,q)^{(2)}+\alpha_2\,(x\,p+y\,q)+\alpha_3\,z=0,$$

ако се узме у помоћ оператор ψ, одговораће карактеристична једначина

$$\psi\,(\psi-1)\,(\psi-2)+\alpha_1\,\psi\,(\psi-1)+\alpha_2\,\psi+\alpha_3=0,$$

тј. $$\psi^3 + (\alpha_1 - 3)\,\psi^2 + (\alpha_2 - \alpha_1 + 2)\,\psi + \alpha_3 = 0.$$

Исту карактеристичну једначину нашли смо другим путем који је био знатно дужи.

Међутим, могућност да интегралимо парцијалну једначину (I) на два потпуно разна начина има, између осталог, корист што можемо, упоређивањем резултата, доћи до вредности детерминанте облика

$$\left\|\begin{array}{l} 1 \\ a_1 \\ a_1(a_1-1) \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ a_1(a_1-1)\ldots(a_1-k+2) \\ a_1(a_1-1)\ldots(a_1-k) \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ a_1(a_1-1)\ldots(a_1-n+1) \end{array}\right\|$$

где смо, ради скраћивања у писању, назначили само прву колону.

Тако је, на пример,

$$\left\|\begin{array}{l} 1 \\ a_1 \\ a_1(a_1-1) \\ a_1(a_1-1)(a_1-2) \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ a_1(a_1-1)(a_1-2)\ldots(a_1-n+3) \\ a_1(a_1-1)(a_1-2)\ldots(a_1-n+1) \end{array}\right\| = P\left[\Sigma a_1 - \binom{n}{2}\right],$$

где је

$$\Sigma a_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

а P Vandermonde-Cauchy-ева детерминанта.

Овим ћемо се детаљније бавити у једном засебном раду.

RÉSUMÉ

Sur une équation linéaire aux dérivées partielles

Par

D. S. Mitrinovitch

Le contenu de ce travail fut résumé succinctement dans notre Note „Sur l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles" insérée dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 210, 1940, p. 783—785.

M. Jules Haag, inspiré par la Note précitée, a inséré aussi aux Comptes rendus, t. 212, 1941, p. 259—261 la Note „Sur certaines équations aux dérivées partielles" dans laquelle il a énoncé un résultat intéressant relatif à l'équation

$$H(x, y, z, z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$

avec

$$z_k = (xp + yq)^{(k)} =$$

$$= x^k \frac{\partial^k z}{\partial x^k} + \binom{k}{1} x^{k-1} y \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-1} \partial y} + \binom{k}{2} x^{k-2} y^2 \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-2} \partial y^2} + \ldots$$

$$\ldots + y^k \frac{\partial^k z}{\partial y^k}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Notre travail se rapporte à l'équation

$$(1) \qquad (xp + yq)^{(n)} + \alpha_1 (xp + yq)^{(n-1)} + \alpha_2 (xp + yq)^{(n-2)} + \ldots .$$

$$\ldots . + \alpha_{n-1} (xp + yq) + \alpha_n z = 0,$$

où α_k sont des constantes.

A l'équation (1) on peut faire correspondre une équation algébrique — équation caractéristique,

$$(2) \qquad a^n + s_1 a^{n-1} + s_2 a^{n-2} + \ldots + s_{n-1} a + s_n = 0,$$

dont les coefficients $s_1, s_2, \ldots, s_n$, combinaisons linéaires en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, se forment au moyen d'un simple procédé.

Ainsi, par exemple, les équations caractéristiques, lesquelles correspondent à $n = 3$ et $n = 4$, sont respectivement:

$$a^3 + (\alpha_1 - 3) a^2 + (\alpha_2 - \alpha_1 + 2) a + \alpha_3 = 0,$$

$$a^4 + (\alpha_1 - 6) a^3 + (\alpha_2 - 3\alpha_1 + 11) a^2 + (\alpha_3 - \alpha_2 + 2\alpha_1 - 6) a + \alpha_4 = 0.$$

On démontre la proposition suivante:

1° L'intégrale générale de l'équation (1) est

$$z = \sum_{\nu=1}^{n} x^{a\nu} f_\nu \left(\frac{y}{x}\right), \qquad \left(f_\nu = \text{fonct. arbitraires de } \frac{y}{x}\right)$$

toutes les fois où toutes les racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de l'équation (2) sont distinctes;

2° Dans le cas où $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont k racines distinctes de l'équation (2), $m_1, m_2, \ldots, m_k$ désignant leurs ordres de multiplicité respectifs

$$\left(\sum_{\nu=1}^{k} m_\nu = n\right),$$

l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$z = x^{a_1} \sum_{\nu=0}^{m_1-1} f_{1\nu} \left(\frac{y}{x}\right) (\log x)^\nu + x^{a_2} \sum_{\nu=0}^{m_2-1} f_{2\nu} \left(\frac{y}{x}\right) (\log x)^\nu + \ldots .$$

$$\ldots . + x^{a_k} \sum_{\nu=0}^{m_k-1} f_{k\nu} \left(\frac{y}{x}\right) (\log x)^\nu$$

$$\left(f_{\mu\nu} = \text{fonct. arbitraires de } \frac{y}{x}\right).$$

Relativement à l'équation

$$(3) \quad z = (xp + yq) - \frac{1}{2!}(xp + yq)^{(2)} + \ldots . + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}(yp + yq)^{(n)},$$

présentant évidemment un cas particulier de l'équation (1), on énonce la proposition suivante:

1° L'intégrale générale de l'équation (3) est

$$z = x f_1 \left(\frac{y}{x}\right) + x^2 f_2 \left(\frac{y}{x}\right) + \ldots + x^n f_n \left(\frac{y}{x}\right);$$

2° L'intégrale complète de l'équation (3) s'obtient en y remplaçant les dérivées par des constantes arbitraires[1]).

---

[1]) Par conséquent, l'équation (3) jouit de la propriété de l'équation de Clairaut.

Exemple. L'équation

$$(4)\quad z=(x\,p+y\,q)-\frac{1}{2!}(x\,p+y\,q)^{(2)}+\frac{1}{3!}(x\,p+y\,q)^{(3)}-\frac{1}{4!}(x\,p+y\,q)^{(4)}$$

laquelle est une forme abrégée de l'équation

$$z=\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)-$$

$$-\frac{1}{2!}\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\,x\,y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(x^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3\,x^2y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}+3\,x\,y^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}+y^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)-$$

$$-\frac{1}{4!}\left(x^4\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+4\,x^3y\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\,\partial y}+6\,x^2y^2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}+4\,x\,y^3\frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3}+y^4\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)$$

admet comme intégrale générale

$$z=x\,f_1\left(\frac{y}{x}\right)+x^2 f_2\left(\frac{y}{x}\right)+x^3 f_3\left(\frac{y}{x}\right)+x^4 f_4\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left(f_v=\text{ fonct. arbitraires de }\frac{y}{x}\right).$$

L'intégrale complète de l'équation (4) est

$$\begin{aligned}z=\;&C_{10}\,x+C_{01}\,y+\\&+C_{20}\,x^2+C_{11}\,x\,y+C_{02}\,y^2+\\&+C_{30}\,x^3+C_{21}\,x_2\,y+C_{12}\,x\,y^2+C_{03}\,y^3+\\&+C_{40}\,x^4+C_{31}\,x^3\,y+C_{22}\,x^2\,y^2+C_{13}\,x\,y^3+C_{04}\,y_4\end{aligned}$$

avec $$C_{mn}=\text{const.}$$

Remarque. Des résultats énoncés plus haut peuvent être généralisés à des équations linéaires aux dérivées partielles, de la forme en question, avec la fonction inconnue z dépendant de plusieurs variables

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m \qquad (m\geq 3).$$

Ainsi, par exemple, l'équation

$$z=\left(x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)$$

$$-\frac{1}{2!}\left(x_1^2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+x_2^2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+x_3^2\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+2x_2x_3\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_3}+2x_3x_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_3\,\partial x_1}+2x_1x_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)$$

admet comme intégrale complète

$$\begin{aligned}z=\;&C_1\,x_1+C_2\,x_2+C_3\,x_3+\\&+C_4\,x_1^2+C_5\,x_2^2+C_6\,x_3^2+C_7\,x_2\,x_3+C_8\,x_3\,x_1+C_9\,x_1\,x_2\end{aligned}$$

avec $$C_k=\text{const}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 9).$$

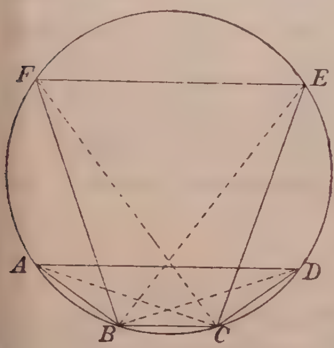
UGAO ZA SVAKOGA

FORMULA $s_5^2=s_{10}^2+r^2$ VAŽI I ZA ZVJEZDOLIKE PRAVILNE LIKOVE

Ako nam s_5 i s_{10} označuju stranicu pravilna peterokuta odnosno 10-kuta upisana u krug polumjera r, onda znamo da je

(1) $$s_5^2 = s_{10}^2 + r^2.$$

Interesantno je, da ista formula važi i za stranicu s'_5 preklopljenog pravilnog 5-kuta (petokraka zvijezda) i stranicu s'_{10} onog preklopljenog pravilnog 10-kuta koji nastaje iz pravilna 10-kuta kad spajamo pojedini njegov vrh sa svakim **trećim** vrhom.



Uistinu, neka je (slika!)

$$A B = B C = C D = s_{10}$$
$$A D = F E = s'_{10}$$
$$A C = B D = s_5$$
$$F C = B E = s'_5.$$

Ako na tetivne 4-kute $ABCD$, $BCEF$ primijenimo Ptolomejev teorem (produkt dijagonala = suma produkata nasuprotnih stranica), imamo

$$s_5^2 = s_{10}^2 + s_{10}\, s'_{10}, \quad s'^2_5 = s_{10}^2 + s_{10}\, s'_{10}$$

odatle odbijanjem: $s_5^2 - s_{10}^2 = s'^2_5 - s'^2_{10}$,

što s obzirom na (1) daje

(2) $$s'^2_5 = s'^2_{10} + r^2.$$

(G. Lony, *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 36, 1905, 406).

EKSPERIMENTALNO ISTRAŽIVANJE BESKONAČNO MALOG I BESKONAČNO VELIKOG U PRIRODI

Tehnika savremenih laboratorija sastoji se dobrim dijelom u tome, da se fenomeni fotografiraju i automatski zapisuju (registriraju); tada poznavanje realnosti proističe brižnim proučavanjem kliševa i grafikona.

Eksperimentalno istraživanje oba beskonačna tek je specijalan slučaj te opće tehnike (metode), pa na pr. ispitivanjem kliševa ustanovljujemo rezultat pretvaranja atoma ili određujemo zapanjujuće brzine sa kojima se od nas udaljuju nebeske maglice.

Međutim, neizmjerno maleno nam je slabije pristupačno, i ono je otkriveno mnogo kasnije nego beskonačno veliko. Pa već podižući oči prema noćnome nebu zapažamo pokraj Polarnice jednu zvijezdu prvoga reda (Deneb) čija nam svjetlost daje podatke stare šest vijekova. Možemo reći da nam se neizmjerno veliko nameće samo po sebi pa je dosta da poboljšamo njegovo prikazivanje oboružavajući na pr. ljudsko oko dalekozorima ili teleskopima, ili zamjenjujući očnu mrežicu osjetiljivim slojem srebrnog bromida.

Naprotiv, neizmjerno malo nam je **brižno sakrivano**: Povećalo, mikroskop, pa i ultramikroskop još nam ne omogućavaju da se spustimo recimo do atomnih dimenzija. Neizmjerno maleno treba da bude **brižno pripravljeno**: U većini slučajeva dobro je da predmete našeg istraživanja izoliramo, da ih oslobodimo od okolišne tvari; a čak je često korisno da ih izbacimo velikom brzinom i pretvorima u *mikroprojektile*. Efekat toga se pokazao vanredno velik.

(Vidi: Marcel Boll, *Les deux infinis*, Paris, 1938, p. 39).

ZADACI

Rješavajte zadatke i šaljite nam rješenja na adresu: Redakcija Glasnika, Marulićev trg 19, Zagreb.

Nije dovoljno da pošaljete samo rezultat u pojedinom zadatku; još nam je važniji opis postupka kojim ste zadatak riješili.

Šaljite nam razne zadatke s pripadnim rješenjem!

Pažnja! *Ne rješavajte više zadataka na jednom te istom komadu papira. Pišite samo na jednoj strani papira!*

*Hitno šaljite rješenja zadataka označenih zvijezdicom *, jer ćemo rješenja takovih zadataka objaviti već u slijedećem broju Glasnika.*

46.* Četa vojnika je u pokretu, i to $4^1/_2$ km na 1^h; u 8^h odvoji se od nje biciklista koji vozi 22 km na 1^h i pođe u izviđanje. Ugledavši, na $2^1/_2$ km od sebe, neprijatelja kako maršira prema njemu (i njegovim drugovima) i to brzinom od 5 km na 1^h, pojuri biciklista brzinom od 30 km na 1^h natrag ususret svojoj četi s kojom se sretne u 11^h. Kako su razdaleko obje čete u momentu kad biciklista daje svoj izvještaj?

47.* Ako d znači dijagonalu pravilna poligona sa $2n$ vrhova nad kojom leže 3 stranice toga poligona, dokaži da je

$$s_n^2 = s_{2n}^2 + s_{2n} \cdot d.$$

48.* $$\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\ldots}}} = \sqrt{\frac{x}{3}+\sqrt{\frac{x}{3}+\sqrt{\frac{x}{3}+\ldots}}}, \quad x = ?$$

49. Neka su a i b poluosi elipse; ako su a_1, b_1 odnosno a_2, b_2 i a_3, b_3 projekcije tih poluosi na tri međusobno okomite ravnine, dokaži da je

$$2\,(a^2 + b^2) = (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2)$$
$$(a\,b)^2 = (a_1\,b_1)^2 + (a_2\,b_2)^2 + (a_3\,b_3)^2$$

50. Dokaži, da je

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{n}{\sin^n \alpha} \int_0^\alpha \sin^n x \, dx \right\} = tg\,\alpha \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

(Spomenuto u P. H. Schoute, *Mehrdimensionale Geometrie* II, str. 326).

Napomena: Nije dovoljno izračunati limes lijeve strane pod pretpostavkom, da taj limes postoji, već treba dokazati i egzistenciju limesa.

51. $$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = ?$$

52. Neka se odredi akceleracija teže na površini Siriusova pratioca uz pretpostavku, da je srednja gustoća te zvijezde 10 000 puta veća od srednje gustoće Zemlje, a polumjer 3 puta veći od polumjera Zemlje.[1])

53. Neka se odredi broj fotona, koji se nalaze u prostoru 1 cm^3 10 m daleko od živine lampe sa 100 vata, uz pretpostavku, da lampa emitira samo svjetlost valne dužine $\lambda = 5460$ Å i da iskorišćenje iznosi $0{,}5^0/_0$.

Uputa i podaci: 1 Å $= 10^{-8}$ cm; energija fotona $= h\nu$ erga; $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ (erg. sek.).

---

* Zvjezdicom označene zadatke mogu riješiti i učenici srednjih škola.

[1]) Prema Eddingtonu iznosi za Siriusov pratilac gustoća 60 000 gram/cm^3, a polumjer 18 800 km.

54.* Grijanje vode u epruveti od temperature t° do vrelišta (100°) traje a sek. Za b daljih sekunda neka se sva voda ispari. Iz ovih podataka neka se odredi toplina isparivanja za vodu.

55. Neka se izračuna privlačna sila Mjeseca na masu 1 kg, ako se ova nalazi a) u središtu Zemlje; b) na mjestu Zemlje koje je Mjesecu najbliže; c) na dijametralnom mjestu Zemlje; d) neka se izvede recipročan takav račun za Mjesec uzevši da privlačne sile potječu od Zemlje; e) koliko puta bi prema takvom računu mogla biti plima na Mjesecu viša od plime na Zemlji, uz pretpostavku, da je visina plime proporcionalna diferenciji između privlačne sile za središte dotičnog nebeskog tijela (Zemlje odnosno Mjeseca) i privlačne sile za mjesto na površini, koje je od drugog nebeskog tijela najdalje odnosno koje mu je najbliže).

Uputa i podaci: Privlačna sila Zemlje na masu 1 kg na zemaljskoj površini iznosi 980 000 dina;

masa Mjeseca $= {}^1/_{80}$ mase Zemlje;

polumjer Mjeseca $\varrho = \frac{2}{7}\, r$;

akceleracija teže na Mjesecu $= g/6$;

daljina od središta Mjeseca do središta Zemlje $= 60\, r$;

u rješenju neka se sile izraze jedinicom *din.*

RJEŠENJA

Objavljujemo rješenja zadataka **9, 11, 14, 25, 33, 38.**

Rješenje svakog zadatka šaljite na posebnom papiru!

9 a. Ako trokut ima dvije jednake kutne simetrale, ima on i dvije jednake stranice (poučak Lehmusa, Steinera, Terquema)[1].

Dokaz se može provesti geometrijski, računski i analitički.

I. Geometrijski dokaz može se provesti ovako: Zamislimo trokut ABC. Simetrala s_α siječe stranicu BC u točki E, simetrala s_β siječe AC u točki D. Sjecište simetrala je F, tako da je spojnica CF simetrala s_γ kuta γ. Pretpostavimo $DB = AE$ (1), ali $\alpha < \beta$, dakle $\frac{\alpha}{2} < \frac{\beta}{2}$ (2). Narišimo zasebno trokut DBC i njegovu opisanu kružnicu, označivši točku F sa F_1, a vrh C sa C_1. Isto tako narišimo trokut AEC i njegovu opisanu kružnicu, označivši točku F sa F_2, a vrh C sa C_2. Obje su kružnice jednake, jer imaju dvije jednake tetive $DB = AE$ s istim obodnim kutom γ. Simetrale C_1F_1 odnosno C_2F_2 toga obodnog kuta sijeku kružnice u točki G, koja je na simetrali stranica DB odnosno AE. Povucimo tu simetralu i označimo sa H njeno sjecište sa stranicama DB odnosno AE, a sa J njeno drugo sjecište s kružnicom. Vidi se lako da je

$$\measuredangle C_1F_1D = \measuredangle GF_1H = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}$$

$$\measuredangle C_2F_2E = \measuredangle GF_2H = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

dakle zbog (2) $\qquad \measuredangle GF_1H > \measuredangle GF_2H.$

Izlazi dalje $GF_1 < GF_2$, a u trokutima GJC_1 i GJC_2 $GC_1 > GC_2$, dakle $GC_1 - GF > GC_2 - GF_2$ ili $C_1F_1 > C_2F_2$, dok bi moralo biti $C_1F_1 = C_2F_2 = CF$. Time je dobivena kontradikcija i dokaz je proveden.

---

[1]) Određivanje trokuta iz dužina njegovih svih triju kutnih simetrala (Catalanov problem) svodi se na rješavanje algebarske j. 7 st. A Catalan je, u brzini, bio zadao taj zadatak u elementarnoj geometriji! (Isp. Barbarin, **Construire un triangle dont les bissectrices sont données**, Mathesis, 1896, 143—150).

II. R a č u n s k i d o k a z. Neka se simetrale kutova α i β zovu s_α i s_β. Poznate su formule (E. Hammer: Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 1916, str. 262)

$$s_\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad s_\beta = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Da je $\alpha > \beta$, bilo bi $a > b$ i $\cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2}$ te

$$\frac{2bc}{b+c} = \frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}} < \frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}} = \frac{2ac}{a+c},$$

dakle $s_\alpha < s_\beta$. Analogno iz $\alpha < \beta$ izlazi $s_\alpha > s_\beta$. Za $s_\alpha = s_\beta$ mora dakle biti $\alpha = \beta$.

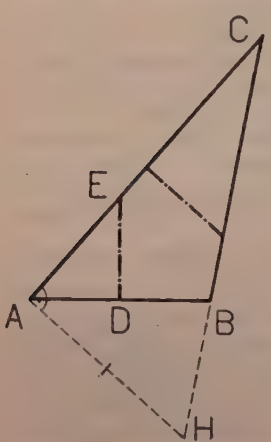
Malo drukčije se može zaključiti na temelju formula (Hammer, l. c.)

$$s_\alpha^2 = \frac{bc\,(b+c-a)\,(a+b+c)}{(b+c)^2}, \qquad s_\beta^2 = \frac{ac\,(a+c-b)\,(a+b+c)}{(a+c)^2},$$

iz kojih se lako dobije

$$s_\alpha^2 - s_\beta^2 = \frac{(a-b)\,c}{(b+c)^2\,(a+c)^2}\,[c^3 + c^2(a+b) + 3\,abc + ab\,(a+b)].$$

Ako je $s_\alpha = s_\beta$, mora dakle biti $a = b$, jer su na desnoj strani osim $(a-b)$ svi faktori pozitivni i prema tome različiti od 0.



9 b. Trokut može imati dvije jednake simetrale stranica, a da ne bude istokračan.[1]) Neka dakle trokut ima dvije jednake simetrale stranica.

Moguća su tri slučaja. Simetrale, koje izlaze iz polovišta dviju stranica mogu imati svoje druge krajnje točke: α) obje na trećoj stranici, β) nijednu na trećoj stranici, γ) samo jednu na trećoj stranici. U slučajevima α) i β) može se traženi geometrijski dokaz lako provesti. U slučaju γ) trokut nije istokračan, a ipak može imati dvije jednake simetrale stranica. Takav trokut nije teško konstruirati. Zada se stranica AB i u njenom polovištu D digne simetrala $DE < \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. Spojnica AE neka određuje smjer stranice AC trokuta. Na AE digne se okomica u točki A i prenese dužina $AH = 2DE$ tako, da kut BAH bude šiljast. Spojnica HB siječe AE u točki C trokuta, kojemu su simetrale stranica AB i AC jednake, kako se lako uviđa. Granični slučaj $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$ daje istostrani trokut.

Gornja tri dokaza i sliku poslao je D. Blanuša, Zagreb. Zadatak 9 a riješio je i Fr. Neděla.

11. Zadane su 2 tačke A, B i pravac p; odredi na p tačku C tako da $\sphericalangle pCA$ bude a) dvaput, b) triput veći nego što je $\sphericalangle pCB$.

a) I. Neka je B' simetrična slika tačke B s obzirom na pravac p; ako je b udaljenost tačke B od p, onda razlikujući slučaj da li su A i B na istoj strani pravca p ili na različitim stranama pravca p, kao i to, da li su kutovi pCA i pCB jednako ili suprotno orijentirani, zaključujemo da je pravac AC tangenta kružnice $k\,(B, b)$ ili kružnice $k\,(B', b)$. To je jedna konstrukcija.

[1]) U tom smislu treba ispraviti zadatak 9 str. 44 a na str. 43 na svršetku reda 16 odozgo dodati »izuzev slučaj 4«.

II. Drugi način se sastoji u tom da se uvidi da je pravac BC simetrala dužine AA_1, gdje je A_1 sjecište pravca p i kružnice kroz A sa središtem u B ili B'.

b) Zadatak se u općem slučaju ne može riješiti šestarom i linealom, jer nas algebarsko rješavanje zadatka dovodi do alg. jednadžbe t r e ć e g s t e p e n a. Označimo li naime sa a i b udaljenost tačke A odnosno B od pravca p, a sa c razmak okomica na p kroz A i B, i konačno sa x udaljenost tačke C od okomice kroz B na p, onda je

$$tg \sphericalangle pCB = \frac{b}{x},\ tg \sphericalangle pCA = \frac{a}{c-x} \quad \text{što zbog } \sphericalangle pCA = 3 \cdot \sphericalangle pCB$$

$$\text{i formule} \quad tg\, 3\alpha = \frac{3\ tg\,\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3\ tg^2\alpha}$$

daje, kad se sredi, kubnu jednadžbu

$$(a + 3b)\,x^3 - 3bc\,x^2 - b^2(3a + b)\,x + b^3 c = 0.$$

Gornja razmatranja a) I, a) II i b) sa raznim slikama, detaljima i diskusijama poslao nam je Fr. Neděla.

14. (Zadao D. Blanuša, Zagreb, riješio Fr. Neděla, Zagreb.)

Dokaži $\quad x^{n+1} \dfrac{d^n}{dx^n}\,[x^{n-1} f(x)] = \left(x^2 \dfrac{d}{dx}\right)^n f(x)$ za svako n.

Dokaz ćemo provesti p o t p u n o m i n d u k c i j o m.

Relacija je očigledna za $n = 1$. Treba još dokazati, da je ona ispravna i za broj n, ako je samo ispravna za broj $n - 1$.

Imamo:

$$\frac{d}{dx}\Big)^n f = x^2 \frac{d}{dx}\left[\left(x^2 \frac{d}{dx}\right)^{n-1} f\right] = (\text{po pretpostavci}) = x^2 \frac{d}{dx}\left[x^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{n-2} f)\right] =$$

$$= x^2 n x^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{n-2} f) + x^2 \cdot x^n \frac{d^n}{dx^n}(x^{n-2} f) =$$

$$= n x^{n+1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{n-1} f \cdot x^{-1}) + x^{n+2} \frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} f \cdot x^{-1}) = (n\text{-ta derivacija produkta}) =$$

$$= n x^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^{n-1-k}}{dx^{n-1-k}}(x^{n-1} f)\,(-1)^k k!\, x^{-1-k} +$$

$$+ x^{n+2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^{n-1} f)\,(-1)^k k!\, x^{-1-k} =$$

$$= x^{n+1} \frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} f) + n x^{n+1} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^{n-1} f)\,(-1)^{k-1}(k-1)!\, x^{-k} +$$

$$+ x^{n+2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^{n-1} f)\,(-1)^k k!\, x^{-1-k} =$$

$$= x^{n+1} \frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} f) + \sum_{k=2}^{n} \left\{ n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^{n-1} f)\,(-1)^{k-1}(k-1)! \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, x^{n+1-k} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^{n-1} f)\,(-1)^{k-1}(-1)\, k!\, x^{n+1-k} \right\} =$$

$$= x^{n+1} \frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} f).$$ Relacija dakle vrijedi za svaki n.

25. (1) $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x = m,\ x = ?$ (Diskusija). (Zadao Stj. Škreblin, Zagreb; riješili: Vl. Jirásek, Fr. Neděla, N. Išpirović, D. Cvelić, Zd. Blašković, svi iz Zagreba).

Zbrojimo li u (1) posljednja 4 člana, dobit ćemo

$$\frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} \text{ što je dalje } = \frac{2\,(1 + \sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2 - 1}.$$

Stavimo li dakle

(2) $$\sin x + \cos x = y$$

prelazi j. (1) u

(3) $$y + \frac{2 + 2y}{y^2 - 1} = m.$$

No $$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

tako da će pojedinom rješenju y jednadžbe (3) odgovarati razna rješenja x j. (1) kao rješenja jednadžbe

(4) $$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = y,$$

koju znamo riješiti. No, kako kosinus ne može biti < -1, niti > 1, bit će prema (4)

(5) $$-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}.$$

U drugu ruku, jasno je, da ne može biti $\sin x = 0$ niti $\cos x = 0$, pa prema (2) niti $y = 1$ niti $y = -1$, tako da razlomak u (3) možemo skratiti sa $y + 1$, a možemo (3) pomnožiti sa $y - 1$ i time dobiti kvadratnu jednadžbu

(6) $$y^2 - (m + 1)\,y + m + 2 = 0$$

koja je zbog $y \neq 1$ ekvivalentna sa j. (3).

Rješavanje dakle zadane j. (1) i rješavanje j. (4), u kojoj nam y znači opće rješenje kvadratne j. (6') $f(y) \equiv y^2 - (m + 1)\,y + m + 2 = 0$ uz uslov

(7) $$-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2},\quad y \neq -1,\quad y \neq 1$$

dva su potpuno ekvivalentna problema.

Zadana dakle j. (1) ima rješenje za svaki onaj m za koji j. (6') ima rješenje koje zadovoljava (7); i obrnuto.

No, u VI. razredu učimo, kad će kvadratna jednadžba $f(y) = 0$ imati barem jedan korijen sadržan između dva broja, kod nas između $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$.

α) J. (6') ima jedan i samo jedan korijen u intervalu $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ jedino, ako je $f(-\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) < 0$, t. j.

$$\left[m\left(1 + \sqrt{2}\right) + 4 + \sqrt{2}\right]\ \left[m\left(1 - \sqrt{2}\right) + 4 - \sqrt{2}\right] < 0.$$

Ta je kvadratna nejednakost ispunjena za

(8) $$m < 2 - 3\sqrt{2} \quad \text{i za} \quad m > 2 + 3\sqrt{2}.$$

β) Da j. (6') ima oba svoja korijena između $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ treba, a i dosta je, da budu ispunjeni ovi uslovi:

1. $a f\left(-\sqrt{2}\right) > 0$, odakle $m > 2 - 3\sqrt{2} = -2{,}242\ldots$
2. $a f\left(\sqrt{2}\right) > 0$, odakle $m < 2 + 3\sqrt{2} = 6{,}242\ldots$
3. Diskriminanta j. (6) mora biti $\geqq 0$ (realnost korijena!) t. j.

$(m + 1)^2 - 2m - 7 \geqq 0$. odakle $m \leqq 1 - 2\sqrt{2} = -1{,}828$ i $m > 1 + 2\sqrt{2} = 3{,}828$.

4. i 5. Polusuma korijenâ (protivni polukoeficijent nepoznanice) leži između

$$-\sqrt{2} \text{ i } \sqrt{2} \text{ dakle } -\sqrt{2} \leq \frac{m+1}{2} \leq \sqrt{2}$$

odakle $$m > -2\sqrt{2}-1 = -3{,}828 \quad \text{i} \quad m < 2\sqrt{2}-1 = 1{,}828.$$

Svi su uslovi 1.—5.[1]) ispunjeni za

(9) $$2-3\sqrt{2} < m < 1-2\sqrt{2}.$$

Naročito mjesto zauzimaju ove vrijednosti za m:

$$2-3\sqrt{2},\quad 1-2\sqrt{2},\quad 2+3\sqrt{2}.$$

I za svaku od njih sistem (6), (7) je moguć, a za prvi i treći od tih brojeva zaključujemo po kontinuitetu da je tada y jedan ili drugi kraj segmenta (7) t. j.

$$-\sqrt{2} \quad \text{ili} \quad +\sqrt{2}.$$

Ukratko: imamo shemu:

Ako je	**Broj rješenja sistema (6), (7)**
$m < 2-3\sqrt{2}$	1
$m = 2-3\sqrt{2}$	1 i to $-\sqrt{2}$
$2-3\sqrt{2} < m < 1-2\sqrt{2},\ m \neq 2$	2
$m = -2$	1 i to $y = 0$
$m = 1-2\sqrt{2}$	dvostruko rješenje $y = 1-\sqrt{2}$
$1-2\sqrt{2} < m < 2+3\sqrt{2}$	0 (nijedno!)
$m = 2+3\sqrt{2}$	1 i to $y = +\sqrt{2}$
$m > 2+3\sqrt{2}$	1

Supstituciju (2) upotrebili su Neděla i Išpirović; no dok kod Nědele ona igra bitnu ulogu, jer se njome dolazi do sistema (6) (7) i jednadžbe (4), dotle je ona kod Išpirovića etapa da dobije jednadžbu ne za $\sin x + \cos x$ nego za $\sin 2x = z$. Ta jednadžba glasi

(10) $$F(z) \equiv z^2 - (m^2-5)\,z + 4\,(m+2) = 0$$

Tu jednadžbu uz uslov

(11) $$-1 \leq z \leq 1$$

promatraju: Išpirović, Jirasek i Cvelić i provode diskusiju. Jirasek istražuje tok funkcije $z\,(m)$, prikazuje je grafički pa je na slici vidljiva cijela gornja shema (gl. sliku na str. 234), ma da izričito o tome ne govori. Cvelić jedini provodi stvar do kraja i rješava sistem (10) (11) služeći se Sturmovim nizom

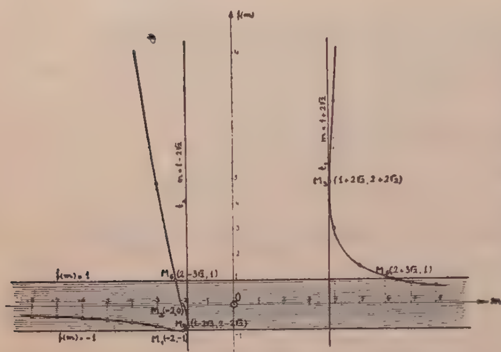
(12) $$F(z),\ F'(z) = 2z - m^2 + 5,\ F_1(z) = D \text{ (diskriminanta j. } F(z) = 0)$$

što pripada kvadratnoj jednadžbi $F(z) = 0$. Uočuje da je $D = (m+1)^2 (m^2 - 2m - 7)$ i traži gubitak varijacija kad se prijeđe s niza (12) za $z =$ početak promatranog intervala (11) na niz (12) za $z =$ svršetak intervala (11). Dobiva shemu, što se nalazi ispod slike na str. 233.

---

[1]) Kod uslova 3. treba uzeti ili jedno ili drugo rješenje!

Funkcya $f(m) = \frac{(m^2-5) \pm \sqrt{m^4-10m^2-16m-7}}{2}$



Ovaj grafikon pokazuje kako rješenja z jedn. (10) zavise o parametru m. Ako je $-1 \leq z \leq 1$ (iscrtana pruga), zadana j. (1) ima bar 1 realno rješenje. Najinteresantniji dio krivulje jest luk

$M_6\,(2-3\sqrt{2},\,1)\; M_2\,(-2,0)\; M_4\,(1-2\sqrt{2},\,2-3\sqrt{2})$:

njega svaka paralela s ordinatnom osi siječe u dvije tačke — osim paralele $m = -2$.

Dovedi u vezu ovu sliku sa tablicom na str. 233 i sa ovom tablicom:

Ako je m između	$-\infty$	$-\sqrt{7}$	$2-3\sqrt{2}$	$1-2\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	$1+2\sqrt{2}$	$2+3\sqrt{2}$	∞
$F(-1)$ . . . . ima znak	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
$F'(-1)$ . . . . „ „	—	—	—	—	+	—	—	—	—	
$F_1(-1)$ . . . . „ „	+	+	+	—	—	—	—	+	+	
Broj varijacija predznaka[1])	2	2	2	1	1	1	1	2	2	
$F(1)$ . . . . . ima znak	—	—	+	+	+	+	+	+	—	
$F'(1)$ . . . . . „ „	—	+	+	+	+	+	—	—	—	
$F_1(1)$ . . . . . „ „	+	+	+	—	—	—	—	+	+	
Broj varijacija	1	1	0	1	1	1	1	2	1	
Gubitak varijacija = broj korijena j. $F(z) = 0$	1	1	2	0	0	0	0	0	1	

Z. Blašković izrazujući trigonometrijske funkcije pomoću $tg\,x$ svodi (1) na jednu jedn. 4 st. za $tg\,x$. Samo pritom treba oprezno baratati s predznacima, jer na pr. $sin\,x$ i $tg\,x$ nemaju uvijek isti znak.

33. Petar veli Pavlu: Meni je dvaput toliko godina, koliko je tebi bilo, kad je meni bilo toliko godina, koliko je tebi sada. Kad bude tebi toliko godina, koliko je meni sada, bit će nam zajedno 63 godine. Koliko je svakome godina?

Zadatak dostavio D. Blanuša. Riješili: M. Vranić, Zagreb; D. Skoko, D. Resa; Vj. Milovan, Pazin; M. Brčić-Kostić, Subotica; Br. Grünbaum, Osijek; M. Krajnović, Sisak; Zd. Ruževič, Karlovac; Z. Bulatović, Beograd; St. Erdelji, Zagreb; Gospodnetić, Zagreb).

Dajemo tri originalna rješenja.

I. (N i k o l i ć):

Neka je Petru sada y, a Pavlu x godina. Petar je sad od Pavla stariji za

$$y - x \text{ godina.}$$

Kad je y-nu (Petru) bilo x — koliko ima sad Pavao — godina, Pavao je imao:

$$x - (y - x) \text{ godina.}$$

Budući da je Petru dvaput toliko godina, to postoji relacija:

$$y = 2\;[x - (y - x)].$$

Nakon $(y - x)$ godina Pavle će imati y godina — koliko sad ima Petar, — a Petar će imati:

$$y + (y - x) \text{ godina.}$$

Pošto će tad imati zajedno 63 godine, postoji relacija:

$$[y + (y - x)] + y = 63.$$

Iz tih dviju relacija izlazi $x = 28$, $y = 21$.

---

[1]) Misli se u nizu $F(-1)$, $F'(-1)$, $F^1(-1)$.

II. (B r. G r ü n b a u m):

Najjednostavnije je staviti, da je Petru sada x godina, a Pavlu $(x-y)$ godina. Kada je Petru bilo $(x-y)$ godina, što je bilo prije y godina, Pavlu je bilo $(x-2y)$ god. Prema zadatku je

$$x = 2\,(x-2y) \tag{1}$$

Pavlu će biti x godina — koliko je Petru sada — kroz y godina; Petru će tada biti $(x+y)$ godina. Prema zadatku je

$$x + (x+y) = 63 \tag{2}$$

Iz jednadžbi (1) i (2) nalazi se $y = 7$; $x = 28$.

Dakle je Petru sada 28 godina, a Pavlu 21 godina.

III. M. B r č i ć - K o s t i ć):

	Petar	Pavle
Prije	y	x
Sada	$2x$	$3x-y$
Poslije	$x+y$	$2x$

I. $3x - y = y$

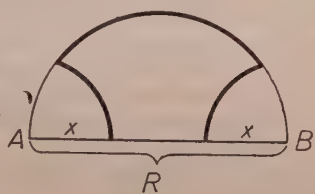
II. $x + y + 2x = 63$

Odatle

$x = 14$; $y = 21$.

Petru je sada $2x = 28$ godina, a Pavlu $3x - y = 21$ godina.

38. Izračunaj površinu tijela što nastaje rotacijom oko AB lika prema slici, ako je zadano R i x. (Zadao D. Blanuša, Zagreb; riješili: D. Skoko, D. Resa; J. Golubić, Hvar; M. Krajnović, Sisak; Zd. Ružević, Karlovac; D. Cvelić, Zagreb i Vl. Jirasek, Zagreb.



Tražena površina P

$=$ površina kugle $\left(\text{polumjer } \frac{R}{2}\right)$

$-$ 2 kalote te iste kugle (visina v nepoznata)

$+$ 2 kalote kugle (polumjer kugle x, a visina kalote je $x - v$)[1]

$$P = R^2\pi - 2\cdot R\pi v + 2\cdot 2x\pi\,(x-v) = R^2\pi - 2R\pi v + 4x^2\pi - 4x\pi v.$$

No x^2 kao kvadrat katete je produkt hipotenuze R i pripadnog odreska v t. j.

$$x^2 = R\cdot v, \qquad \text{dakle} \qquad v = \frac{x^2}{R}, \text{ pa je}$$

$$P = R^2\pi - 2R\pi\cdot\frac{x^2}{R} + 4x^2\pi - 4x\pi\cdot\frac{x^2}{R} = R^2\pi + 2x^2\pi - \frac{4x^3\pi}{R}$$

$$P = \pi\cdot\left(R^2 + 2x^2 - \frac{4x^3}{R}\right) \qquad \text{ili} \qquad P = \pi\left(R^2 + \frac{2x^2 D}{R}\right),$$

gdje je D zajednički dio tijela i osi rotacije.

D. Cvelić, pitajući se kako P zavisi o x, nalazi da je za $x = \frac{1}{3}R$, P maksimalan i $= \frac{29}{27}R^2\pi$ a za $x = 0$, P je minimalan i $= R^2\pi$, jer su 0 i $\frac{R}{3}$ rješenja jednadžbe $P'(x) = 0$, a k tome je $P''(0) > 0$, $P''\left(\frac{R}{3}\right) < 0$. Jasno je da pri tom $P(x)$ znači funkciju $\pi\left(R^2 + 2x^2 - \frac{4}{R}x^3\right)$.

---

[1]) Šestoškolac D. S k o k o govori o dvjema konveksnim i dvjema konkavnim kalotama.

IZVJEŠTAJ TAJNIKA MATEMATIČKO-FIZIČKE SEKCIJE U ZAGREBU

Sekcija je u 1946. godini produžila rad započet 1. rujna 1945. U toku 1946. god. održano je svega 22 stručna matem.-fiz. kolokvija i to:

1. Dr. Đ. Kurepa: Matematički kontinuum (16. I).
2. Dr. L. Randić: Koordinatni sistemi astronomije (30. I).
3. M. Sevdić: O interpretacijama geometrije Lobačevskoga (13. II).
4. Dr. Br. Marković: Ogib oko sjena u izravnoj sunčevoj svjetlosti (27. II).
5. D. Šuljak: Određivanje pozicije broda na oceanu (13. III).
6. Dr. D. Pejnović: Dva jubileja u magneto-optici (27. III).
7. Dr. S. Bilinski: Homogene mreže u ravnini (10. IV).
8. B. Maksić: Cirkulacije atmosfere u umjerenim širinama (24. IV).
9. Dr. M. Hercigonja: Slika prim brojeva (15. V).
10. Dr. D. Blanuša: Značenje geom. Lobačevskoga u teoriji relativnosti (22. V).
11. A. Obuljen: Lokalna sinoptička analiza (5, VI).
12. Dr. V. Niče: O imaginarnim elementima u geometriji (19. VI).
13. Dr. D. Blanuša: Kinetika spec. teorije relativnosti (16. X).
14. Dr. D. Blanuša: Dinamika teorije relativnosti (23. X).
15. Dr. D. Blanuša: Tenzorski račun (30. X).
16. Dr. D. Blanuša: Opća teorija relativnosti (6. XI).
17. V. Glumac: Medicinska fizika (13. XI).
18. Dr. Havliček: Referat o konferenciji fizikalnog društva u Cambridgeu (1946) (20. XI).
19. Dr. D. Blanuša: Fizikalne i kosmološke konsekvencije teorije relativnosti (27. XI).
20. Dr. Bran. Petronijević: Geometrija diskretnog prostora (4. XII).
21. J. Mokrović: Dubokofokalni potresi (11. XII).
22. Dr. Z. Janković: Cikloida kao brahistohrona i tautohrona krivulja (18. XII).

*

Prilikom 90. godišnjice smrti N. I. Lobačevskoga i 120 godina otkako je svojom raspravom udario temelje svojoj geometriji, sekcija je priredila (1. III) proslavu na kojoj je M. Sevdić govorio: O tvorcu nove geometrije — N. I. Lobačevskome. U zajednici s Društvom za kulturnu saradnju Hrvatske sa SSSR., isto je priređena proslava Lobačevskoga (20. III.), na kojoj je M. Sevdić govorio o životu Lobačevskoga, a Dr. M. Hercigonja o njegovu radu.

Povodom 350 godišnjice rođenja velikog matematičara, fizičara i filozofa Renéa Descartesa, bila je priređena proslava (14. XII) na kojoj je Dr. M. Pajić govorio o Descartesu kao fizičaru, Dr. Filipović o Descartesu kao filozofu, a Dr. Đ. Kurepa o značenju Descartesa u matematici.

Na poticaj Mjesnog sindikalnog odbora u Zagrebu, počela je sekcija i sa radom, koji je inače imala u svome programu, naime o pedagoškim i metodičkim pitanjima nastave matematike i fizike u srednjoj školi, a sve u cilju stručnog uzdizanja i međusobnog upoznavanja nastavnika matematike i fizike u Zagrebu. Ponajprije održan je zajednički sastanak (12. VI) na kome je govoreno o zadacima i važnosti ovakvih sastanaka, koji će se održavati pod imenom debatnih sastanaka. Do sada su održana 4 debatna sastanka i to:

1. Ing. Blažeković: Kako u predavanjima uvodim pojam mase (31. X).

2. M. Sevdić: Kako sam uveo pojam logaritma (14. XI).

3. Dr. K. Kempny: Uvodni eksperiment za tlak zraka, i Dr. Lopašić: Galilejev zakon tetiva (12. XII).

4. S. Grubić: Uvođenje fizike na maturi (19. XII).

U cilju popularizacije održana su slijedeća predavanja: Dr. V. Vranić: Kvadratura kruga (21. I); Dr. M. Hercigonja: Fermatov problem i njegovi rješavatelji (6. II). Za srednjoškolce zagrebačkih gimnazija održao je M. Sevdić: Počeci matematike. Prehistorija (11. XI) i Matematika starih Egipćana (1. XII). U sindikatu tramvajaca održao je Ing. V. Pinter »O osnovima elektrotehnike« (14. III), i za srednjoškolske rukovodioce »O struji« (3. V).

Odborskih sjednica održano je 18.

Glavna godišnja skupština održana je 2. X., pa je na njoj izabran ovaj odbor: Pročelnik: Dr. Dušan Pejnović (koji se zbog zdravstvenih razloga zahvalio); zamj. proč.: Dr. Danilo Blanuša; tajnik: M. Sevdić; blagajnik: Dr. Đ. Kurepa; odbornici: Dr. Željko Marković; Dr. Marin Katalinić; Ing. B. Blažeković; Dr. Mira Hercigonja; Dr. Ivan Supek; Dr. V. Vranić; prof. M. Lukšić; prof. B. Maksić; prof. V. Jirasek; stud. Č. Majić; Dr. M. Kiseljak; Dr. J. Goldberg; Dr. Havliček; stud. Devide; Ing. V. Pinter; Dr. S. Bilinski; prof. M. Brozović; prof. Deduš; prof. V. Glumac; stud. Ivan Česnik; prof. Lav Rajčić; prof. S. Grubić; Dr. Branimir Marković; prof. J. Ećimović.

Tajnik: Sevdić.

RAD ASTRONOMSKO-GEOFIZIČKE SEKCIJE U 1946. GODINI

Početkom 1946. godine održan je na inicijativu sekcije kurs astronomije za nastavnike srednjih škola u Zagrebu u okviru Ministarstva prosvjete. U toku 58 sati predavanja obradilo je 7 predavača gradivo potrebno za predavanje astronomije u srednjim školama. Rano u proljeće održana su dva predavanja u okviru redovitih predavanja sekcije u dvorani Pučkog sveučilišta. Zvjezdarnica sekcije bila je otvoreno svake srijede i subote za građanstvo i petkom za sindikate. Naročito je bio velik posjet za vrijeme *Tjedna kulture,* kada su svaki dan dolazile sindikalne organizacije iz poduzeća. Uz svako pokazivanje na durbinima održano je popularno predavanje. Zvjezdarnicu su redovito posjećivale škole, da nadopune opažanjima znanje stečeno u razredu. Za vrijeme ljeta bio je velik posjet građana, ali se je opazilo, da je zvjezdarnici potreban temeljiti popravak, naročito popravak drvenog poda. Zahvaljujući brizi naših narodnih vlasti, naročito zalaganjem potpretsjednika Gradskog Narodnog Odbora Zagreba, izvedeni su u jeseni potrebni popravci kupole i izmjena drvenog poda. Zbog izvanredno nepovoljnih vremenskih prilika nije tokom zadnja dva mjeseca iza popravka bilo opažanja na zvjezdarnici. U društvenim prostorijama organizirana su predavanja za stručno usavršavanje omladinaca kao rukovodilaca kružoka. U okviru Sekcije spremljeno je nekoliko rukopisa za *Malu naučnu knjižnicu* i *Knjižnicu prirode* a u časopisu »*Prirodi*« daje se svakog mjeseca izgled neba za naredni mjesec.

Radom sekcije pokazalo se je, da je pravilnije, ako članovi geofizičari rade u okviru Matematičko-fizičke sekcije, pa je odlučeno, da oni pređu u tu sekciju, a sekcija dalje radi pod imenom Astronomska sekcija Hrv. prirodoslovnog društva.

SADRŽAJ

UGAO ZA SVAKOGA

Zadaci

Rješenja zadataka

Bibliografija — Kronika

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗНОЕ

Библиография—Хроника

TABLE DES MATIÈRES

MÉLANGES

CONTENTS

MISCELLANY

REGLED IZRAĐENIH ZADATAKA U SVESKU 1

Broj zadatka strana na kojoj je štampan odnosno riješen	Zadao-la	Riješio-la[1])
1 (43; 140)	D. Blanuša	D. Cvelić; V. Devidé; Z. Bulatović; Zd. Blašković; M. Lukšić i D. Šuljak.
2 (43; 140)	Đ. Kurepa	D. Cvelić; Zd. Blašković.
4 (44; 186)	Đ. Kurepa	Fr. Neděla.
5 (44; 187)	Đ. Kurepa	D. Blanuša; Vl. Devidé.
8 (44; 142)	D. Pejnović	
9 (44; 229)	L. Rajčić—Đ. Kurepa	D. Blanuša i Fr. Neděla.
11 (92; 230)	L. Rajčić—Đ. Kurepa	Fr. Neděla.
14 (92; 231)	D. Blanuša	Fr. Neděla.
16 (93; 190)	D. Blanuša	V. Devidé; M. Brčić-Kostić.
20 (93; 191)	D. Pejnović	Stj. Malčić.
21 (93; 191)	D. Pejnović	J. Lukatela i Stj. Malčić
23 (138; 192)	V. Lopašić	O. Savić i svi oni koji su riješili zadatak 24.
24 (138; 192)	D. Blanuša	St. Erdelji; J. Ećimović; V. Cvitas; A. Grgić; B. Glunčić; St. Tojčić; V. Jirásek; Fr. Neděla; N. Išpirović; D. Cvelić; Z. Bulatović; Stj. Malčić; P. Smorodski i M. Krajnović.
25 (138; 232)	Stj. Škreblin	Vl. Jirásek; Fr. Neděla; N. Išpirović, D. Cvelić; Zd. Blašković.
33 (184; 234)	D. Blanuša	M. Vranić; D. Skoko; Vj. Milovan; M. Brčić-Kostić; Br. Grünbaum; M. Krajnović; Zd. Ružević; Z. Bulatović; St. Erdelji i Gospodnetić.
38 (184; 235)	D. Blanuša	D. Skoko; J. Golubić; M. Krajnović; Zd. Ružević; D. Cvelić i Vl. Jirásek.

[1]) Imena onih koji su pojedini zadatak riješili objavljujemo onim redom kako su rješenja pristizala.